INSTRUCCIONES PARA RECUPERAR PLÁSTICA DE 4º ESO EN SEPTIEMBRE.

CURSO 2016 -17

En septiembre se hará un examen de todo lo que se ha dado durante el curso.

No habrá entrega de láminas, por lo que, hay que mirar con cuidado todos los documentos colgados.

El **100%** del examen será del temario de **geometría**.

¿Qué hay que estudiar de esta parte?

En geometría se debe estudiar tan solo las preguntas que están subrayadas. No caerán ninguna otra pregunta o figura que no esté en las fotocopias.

Para el examen hay que traer el siguiente material:

- Escuadra, cartabón y regla numerada
- Compás
- Portaminas, con minas de repuesto, o lápiz, con sacapuntas
- Goma de borrar
- Bolígrafo

Si no se trae el material, no se podrá hacer el examen de geometría, pues el material es imprescindible para resolver todos los ejercicios.

No habrá preguntas de tipo test, en geometría se tendrán que resolver los ejercicios planteados.

Eso es todo. Ánimo con el estudio pues, todo lo hemos visto en clase y se ha repetido mucho.

Feliz verano!

4° ESO

Cómo se suman y restan ángulos

Dados los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ (fig. 29):

1. Con radio arbitrario y centros en *A* y *B* se trazan dos arcos que cortan a los lados de los ángulos en los puntos *D, E, F* y *G*.
2. Con el mismo radio y centro en un punto *C* arbitrario se traza un arco base que corta a la recta *r* en *H*. Con centro en *H* y radio *DE* se describe un arco que corta al arco base en *I*.
3. **Suma**. Con centro en *I* y radio *FG* se describe otro arco en el mismo sentido que el anterior, que corta al arco base en el punto *J* (fig. 29a).
4. **Resta**. Con centro en *I* y radio *FG* se describe otro arco en sentido contrario al anterior, que corta al arco base en el punto *J* (fig. 29b).
5. La recta *s* que une los puntos *C* y *J* forma con *r* el ángulo buscado en los dos casos.

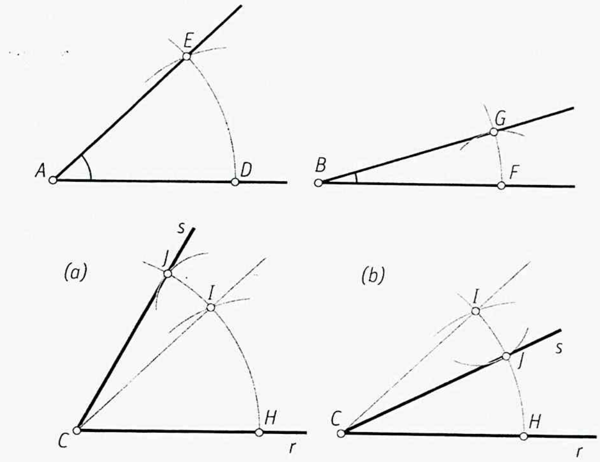


Figura 29

Cómo se traza la bisectriz de un ángulo

Dado un ángulo $\hat{A}$ formado por *r* y *s* (fig. 30):

1. Con centro en el vértice *A* y radio arbitrario se traza un arco que corta a *r* y *s* en los puntos *B* y *C*.
2. Con centros en *B* y *C* se trazan dos arcos arbitrarios de igual radio que se cortan en *D*. La recta *t* que une los puntos *A* y *D* es la bisectriz del ángulo.

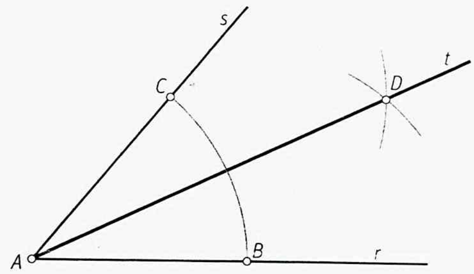


Figura 30

EJERCICIOS RESUELTOS

4 **Los extremos *r* y *s* de un abanico se han abierto hasta formar un ángulo de 150° (fig. 31). Dibuja la posición de las varillas intermedias sabiendo que el ángulo ha quedado dividido en dieciséis partes iguales.**

Solución:

1. Se traza la bisectriz *t* del ángulo que forman *r* y *s*.
2. Se trazan las bisectrices *m* y *n* de los ángulos que forman las rectas *r* y *t* por un lado y *s* y *t* por otro.
3. Se trazan las bisectrices *a, b, c* y *d* de los cuatro ángulos que forman las rectas *r, m, t, n* y *s*.
4. Por último, se trazan las bisectrices *e, f, g, h, i, j, k* y *l* de los ángulos que forman las rectas *r, a, m, b, t, c, n, d* y *s*.

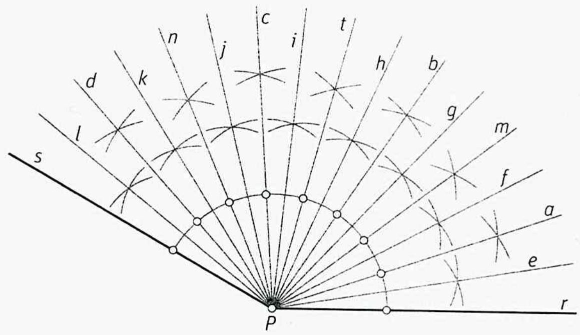


Figura 31

Cómo se traza la bisectriz del ángulo que forman dos rectas que se cortan fuera de los límites del dibujo

Dadas las rectas *r* y *s* (fig. 32):

1. Se traza una recta que corta a *r* y *s* en los puntos *A* y *B*.
2. Se trazan las bisectrices *a, b, c* y *d* de los ángulos que forman las rectas *r* y *s* con la recta *AB*.
3. Las bisectrices anteriores se cortan en los puntos *C* y *D*. La recta *t* que une estos puntos es la bisectriz buscada.

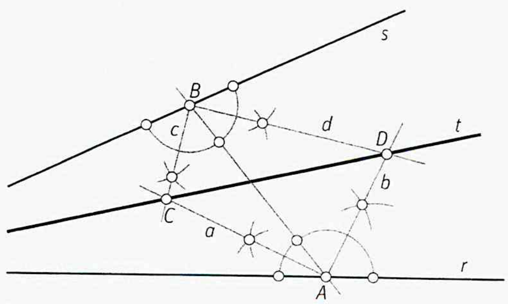


Figura 32

1

Cómo se traza la recta que pasa por un punto dado y que es concurrente con otras dos rectas dadas que se cortan fuera de los límites del dibujo

Dadas las rectas *r* y *s* y el punto *P* (fig. 33):

1. Se traza una recta que corta a *r* y *s* en los puntos *B* y *C*.
2. Se unen los puntos *B* y *C* con *P*, definiendo el triángulo *PBC*.
3. Se traza otra recta arbitraria paralela a la recta *BC*, que corta a *r* y *s* en *E* y *F*.
4. Por el punto *E* se traza una paralela a *PB* y por el punto *F* se traza una paralela a *PC*; ambas paralelas se cortan en *D*. La recta *t* que une *P* y *D* es la solución.

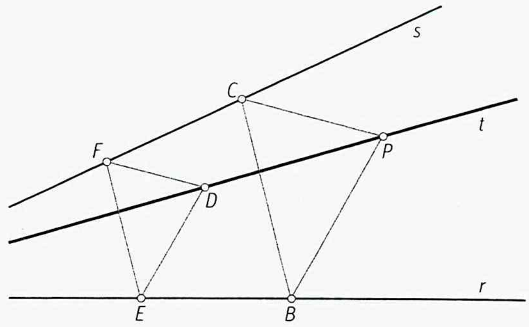


Figura 33

Cómo se divide un ángulo recto en tres partes iguales

Dadas las rectas *r* y *s* que forman 90° (fig. 34):

1. Con centro en el vértice *A* y radio arbitrario se traza un arco de circunferencia que corta a la recta *r* en *B* y a la recta *s* en *C*.
2. Con centros en *B* y *C* y el mismo radio, se trazan dos arcos que cortan al primero en *D* y en *E*.
3. Las rectas *AD* y *AE* dividen el ángulo recto en tres ángulos iguales.

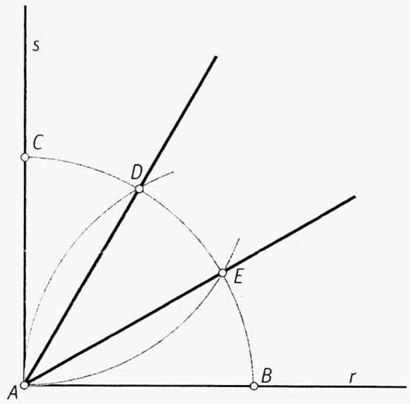


Figura 34

4.1. Ángulos mixtilíneos y curvilíneos

La bisectriz de un ángulo formado por una recta y una curva o por dos curvas es la línea que equidista de ambos elementos geométricos.

- **Ángulo rectilíneo**. Es el formado por dos líneas rectas.
- **Ángulo mixtilíneo**. Es el formado por una línea recta y una línea curva (fig. 35).
- **Ángulo curvilíneo**. Es el formado por dos líneas curvas; por ejemplo, dos arcos de circunferencia (fig. 36).

Cómo se construye la bisectriz de un ángulo mixtilíneo

Sea la recta *r* y el arco de centro *O* (fig. 35):

1. Por un punto *B* de la recta se traza una perpendicular; se llevan sobre ella divisiones iguales, y se trazan paralelas a *r*.
2. Por un punto *C* del arco se traza el radio; se llevan sobre él divisiones iguales a las anteriores, y se trazan arcos concéntricos.
3. Los puntos de intersección de la paralela *1* con el arco *1*, de la paralela *2* con el arco *2*, de la paralela *3* con el arco *3*, etc., determinan la bisectriz del ángulo mixtilíneo.

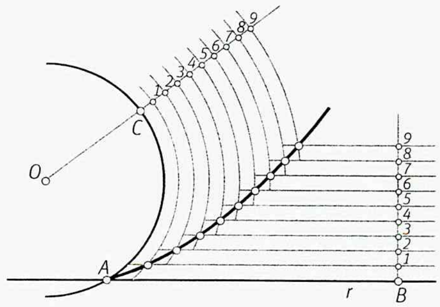


Figura 35

Cómo se construye la bisectriz de un ángulo curvilíneo

Sean los arcos de centros O_1 y O_2 (fig. 36):

1. Por los puntos arbitrarios *B* y *C* de los arcos se trazan sendos radios; se llevan sobre ellos divisiones iguales, y se trazan arcos concéntricos.
2. Los puntos de intersección de los arcos correspondientes determinan la bisectriz del ángulo curvilíneo.

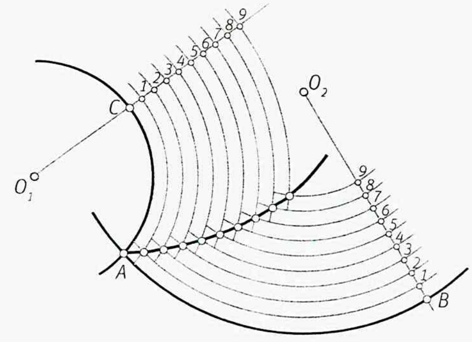


Figura 36

4.2. Otras construcciones de ángulos

Cuando no se dispone de un transportador de ángulos, es posible trazar ciertos ángulos con sencillas construcciones realizadas con otros instrumentos de dibujo.

- Cómo construir ángulos con el compás

Con un compás se pueden trazar los ángulos de 15°, 30°, 45°, 60°, 75° y 90°, así como los que se obtienen al sumar 90° a los anteriores: 105°, 120°, etc. (fig. 37).

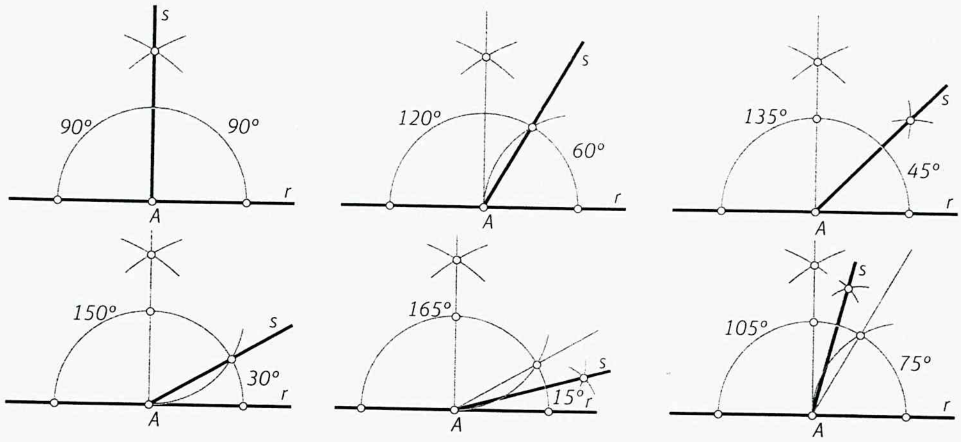


Figura 37

Cómo construir ángulos con la escuadra y el cartabón

Con el simple manejo de la escuadra y el cartabón también pueden obtenerse determinados ángulos (fig. 38).

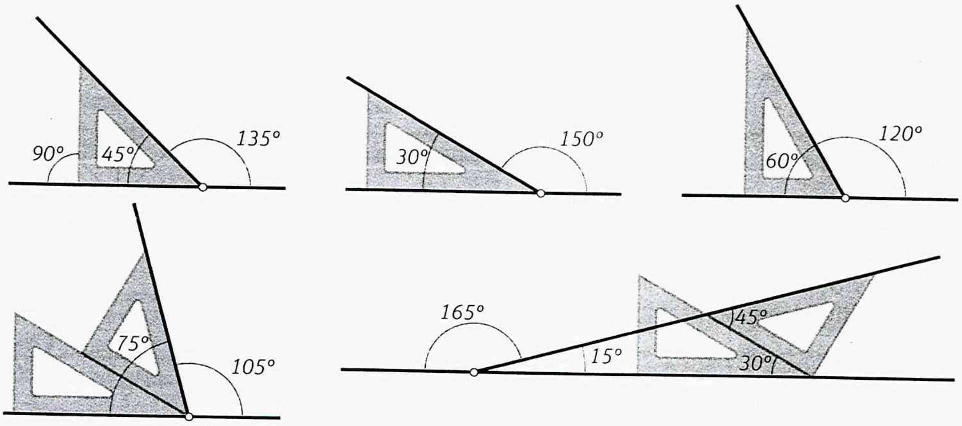


Figura 38

EJERCICIOS RESUELTOS

5 Dadas las rectas *r* y *s* y el punto *P* (fig. 39), halla los puntos *M* y *N* que están a 20 mm del punto *P* y que equidistan de las rectas *r* y *s*.

Solución:

1. Se traza la bisectriz *t* del ángulo que forman las rectas *r* y *s* dadas (fig. 39), lugar geométrico de los puntos que equidistan de *r* y *s*.
2. Con centro en *P* se traza la circunferencia de radio 20 mm, que corta a la recta *t* en los puntos *M* y *N*, soluciones del ejercicio.

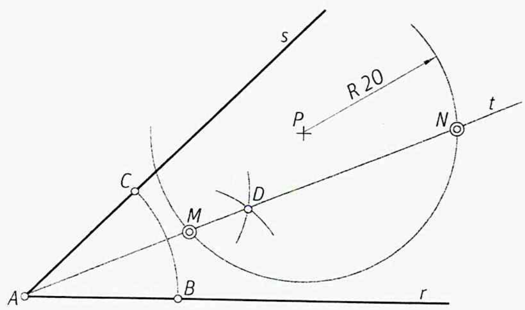


Figura 39

3

1 Triángulos

Hay un sinfín de ejemplos de triángulos a nuestro alrededor: las señales de tráfico (fig. 1), la escuadra y el cartabón con los que dibujamos, la punta de las flechas que hay pintadas en algunas calles, etc.

Figura 1

Un **triángulo** es una superficie plana limitada por tres rectas que se cortan dos a dos. Los puntos de intersección de las rectas se llaman **vértices**, y los segmentos comprendidos entre los vértices, **lados** del triángulo.

Los vértices se designan con letras mayúsculas latinas en sentido contrario a las agujas del reloj, y los lados con minúsculas, utilizando para ello la misma letra del vértice opuesto; por ejemplo, el lado *a* será el lado opuesto al vértice *A*.

Los triángulos se pueden clasificar atendiendo a sus lados o a sus ángulos. Según sus lados (fig. 2) se clasifican en:

- **Equilátero** (a). Triángulo con los tres lados iguales.
- **Isósceles** (b). Triángulo con dos lados iguales y el tercero distinto.
- **Escaleno** (c). Triángulo con los tres lados distintos.

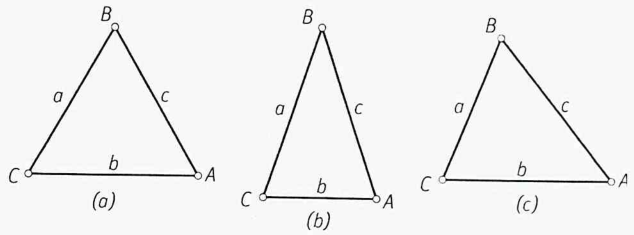


Figura 2

Según sus ángulos (fig. 3) se clasifican en:

- **Rectángulo** (a). Triángulo con un ángulo recto (igual a 90°).
- **Acutángulo** (b). Triángulo con los tres ángulos agudos (inferiores a 90°).
- **Obtusángulo** (c). Triángulo con un ángulo obtuso (superior a 90°).

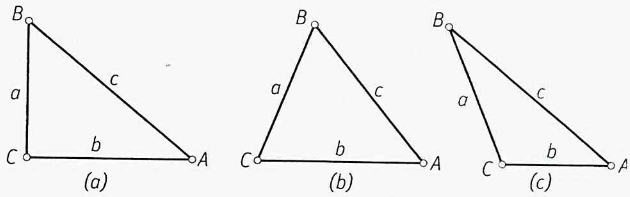


Figura 3

Las **rectas** y **puntos notables** de los triángulos son:

- **Altura.** Es la recta perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto. Un triángulo tiene tres alturas. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado **ortocentro** (fig. 4).
- **Mediana.** Es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Un triángulo tiene tres medianas. Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto que se llama **baricentro** (fig. 5). El baricentro de un triángulo es el centro de gravedad del mismo y está a una distancia de los vértices igual a dos tercios de la longitud total de la correspondiente mediana.
- **Mediatriz.** Es la recta perpendicular trazada por el punto medio de un lado. Un triángulo tiene tres mediatrices. Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado **circuncentro** (fig. 6). Se llama así por ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Equidista de los tres vértices.
- **Bisectriz.** Es la recta que divide uno de los ángulos en dos ángulos iguales. Un triángulo tiene tres bisectrices interiores. Las tres bisectrices interiores de un triángulo se cortan en un punto, llamado **incentro** (fig. 7). Se llama así por ser el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

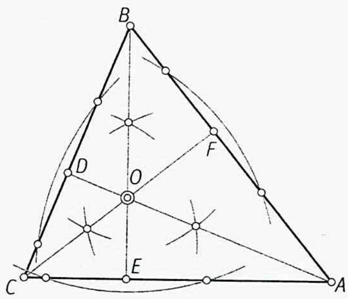


Figura 4

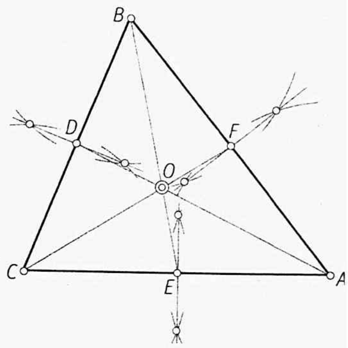


Figura 5

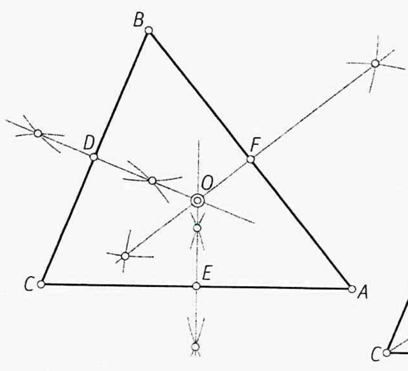


Figura 6

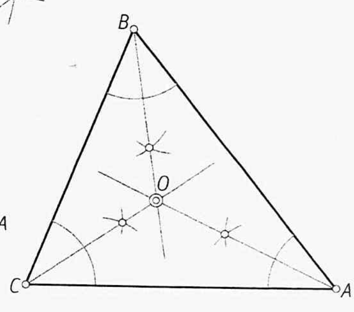


Figura 7

Ten en cuenta

- La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo vale 180°.
- Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia.
- En un triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cada uno de sus catetos.

os **triángulos** y **rectas notables** del triángulo son:

- **Bisectrices exteriores.** Las tres bisectrices exteriores de un riángulo se cortan en tres puntos (fig. 8), que en el ejemplo de la igura son los puntos *D*, *E* y *F*. Estos puntos son los centros de las ircunferencias **exinscritas** (inscritas por el exterior).

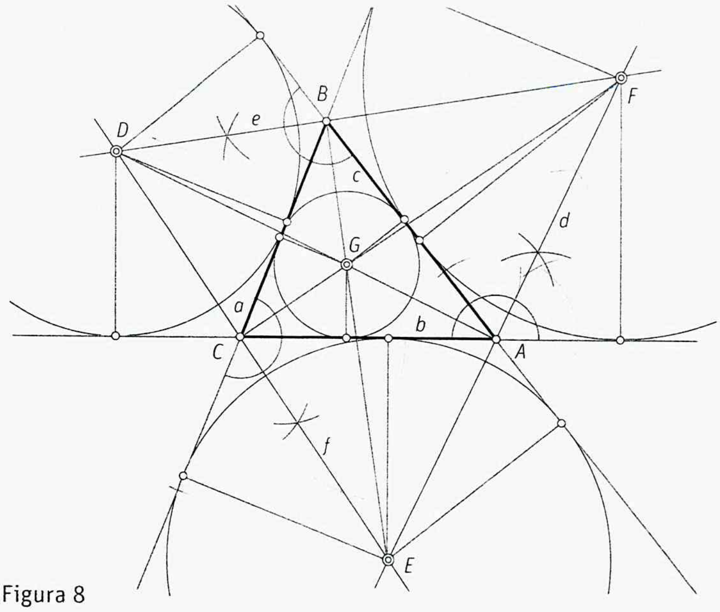


Figura 8

Ceviana. Es la línea que une un vértice con cualquier punto del lado opuesto (fig. 9).

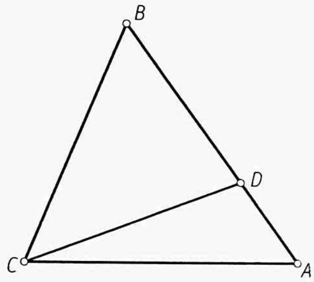


Figura 9

Triángulo órtico. Se llama así al triángulo cuyos vértices son los pies de las tres alturas de un triángulo (fig. 10).

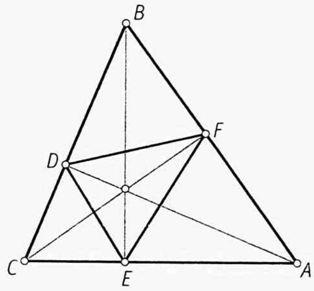


Figura 10

Triángulo complementario. Es aquel cuyos vértices son los puntos medios de los tres lados de otro triángulo (fig. 11).

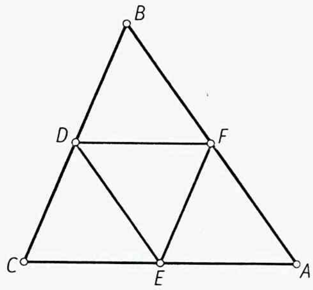


Figura 11

Triángulo podar. Se denomina triángulo podar de un triángulo dado, respecto de un punto *P*, al triángulo cuyos vértices son los pies de las perpendiculares a los lados trazadas desde el punto *P* (fig. 12).

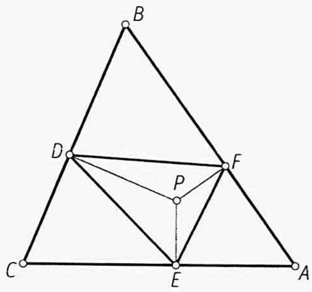


Figura 12

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Construye un triángulo rectángulo sabiendo que su altura sobre la hipotenusa vale 30 mm y que la proyección de uno de sus catetos sobre la hipotenusa vale 20 mm. Halla el incentro, el circuncentro, el baricentro y el ortocentro de dicho triángulo.**

Solución:

1. Sobre una recta *r* cualquiera se sitúa el segmento *AD* = 20 mm (fig. 13).
2. Por el punto *D* se traza la perpendicular a la recta *r* y se traslada la distancia *DC* = 30 mm.
3. Se dibujan las mediatrices a los segmentos *AB* en el punto medio *E* y *BC* en su punto medio *F*.
4. **Ortocentro**, *C*: punto donde se cortan las alturas *AC*, *BC* y *CD*; **circuncentro**, *E*: punto donde se cortan las mediatrices; **baricentro**, *M*: punto donde se cortan las medianas *AF* y *CE*; **incentro**, *N*: punto donde se cortan las bisectrices *AN* y *BN*.

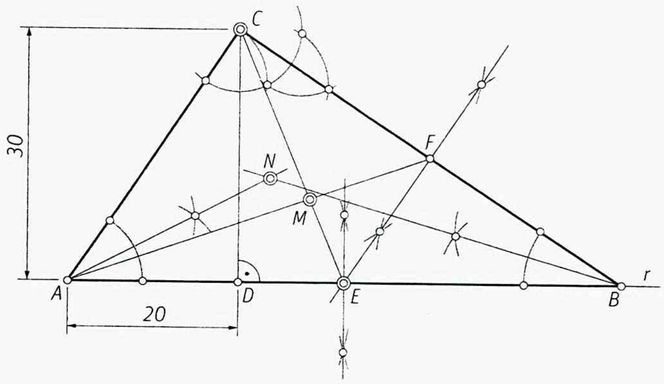


Figura 13

3 Polígonos regulares

La señal de *stop* que indica "parada" (fig. 41), la forma en planta del edificio del ministerio de defensa de Estados Unidos, la forma de las celdillas en los paneles de miel de las abejas, cada una de las caras de un dado, etc., son ejemplos que nos dan idea de la multitud de sitios en los que podemos encontrar polígonos regulares.

Un **polígono** es el espacio limitado por una línea quebrada, cerrada y plana. Cada segmento de la línea quebrada se denomina **lado** y los puntos de intersección de los lados, **vértices**.

Los polígonos se pueden clasificar en:

- **Polígono equilátero**. Tiene todos sus lados iguales.
- **Polígono equiángulo**. Tiene todos los ángulos iguales.
- **Polígono regular**. Sus lados y sus ángulos son iguales.
- **Polígono irregular**. No cumple ninguna de las tres condiciones anteriores.

En esta unidad nos referiremos siempre a los polígonos regulares.

Por otro lado, los polígonos pueden ser de dos tipos:

- **Polígono convexo**. Al trazar cualquier recta, solo corta al polígono en dos puntos.
- **Polígono cóncavo**. Existe al menos una recta que lo corta en más de dos puntos.

Una tercera clasificación de los polígonos es la siguiente:

- Se dice que un polígono está **inscrito** en una circunferencia si todos sus vértices están en ella.
- Se dice que un polígono está **circunscrito** a una circunferencia si todos sus lados son tangentes a la misma.

Los polígonos reciben distintos nombres según el número de lados:

Nombre	Número de lados
Triángulo	3
Cuadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octógono	8
Eneágono	9
Decágono	10
Undecágono	11
Dodecágono	12
Pentadecágono	15

El triángulo regular se llama **triángulo equilátero** y el cuadrilátero regular se llama **cuadrado**.

Los polígonos que no aparecen en la tabla se nombran indicando el número de lados que tienen; así, un polígono que tenga el doble de lados que un eneágono se llama *polígono de dieciocho lados*.

Figura 41

Ten en cuenta

- La suma de los ángulos α internos de un polígono de n lad[os] es igual a 180° por el número de lados menos dos:

$$\varphi = 180^\circ \cdot (n-2)$$

- La suma de los ángulos β externos de un polígono es igual a 360
- El número de diagonales de un polígono de n lados es:

$$\text{número de diagonales} = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$$

3.1. Elementos notables de un polígono

En un polígono de un número cualquiera de lados se distinguen lo[s] siguientes elementos (fig. 42):

- **Centro**. Es el punto O del plano equidistante de todos los vértice[s]
- **Radio**. Es la recta R que va del centro a un vértice cualquier[a]. Coincide con el radio de la circunferencia c circunscrita.
- **Apotema**. Es la recta a que une el centro con el punto medio d[e] uno de sus lados. Coincide con el radio de la circunferencia c inscrita en el polígono.
- **Altura**. Es la recta h perpendicular a uno de los lados trazad[a] desde el vértice opuesto.
- **Diagonal**. Es la recta d' que une dos vértices no consecutivos.
- **Diagonal principal**. En los polígonos de un número par de lados es la recta d que une dos vértices opuestos.
- **Perímetro**. Es la suma de las longitudes de todos los lados de u[n] polígono.

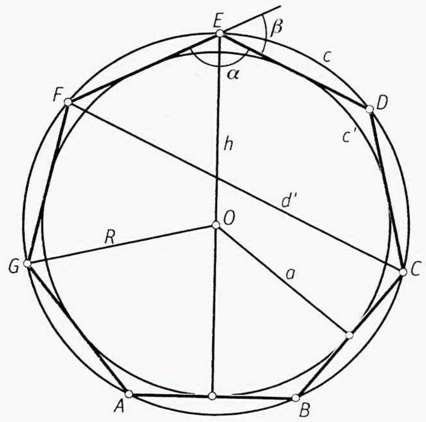


Figura 42

3.2. Construcción de polígonos regulares conociendo el radio

- Cómo dividir una circunferencia en 3, 6, 12, ... partes iguales

Dada la circunferencia de centro *O* (fig. 43):

1. Se traza un diámetro *AG* cualquiera.
2. **Hexágono.** Con radio igual al radio de la circunferencia dada y con centros en *A* y *G* se trazan dos arcos, que cortan a la circunferencia en los puntos *K*, *I*, *C* y *E*, vértices del hexágono.
3. **Triángulo.** El triángulo equilátero *AEI* se halla uniendo los vértices del hexágono de dos en dos.
4. **Dodecágono.** Si se trazan desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del hexágono, estas cortarán a la circunferencia en seis puntos que, junto con los vértices del hexágono, forman el polígono de doce lados.

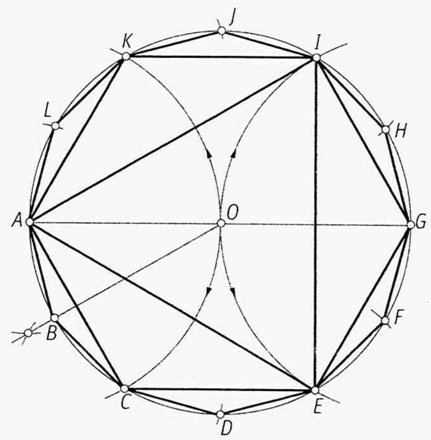


Figura 43

- Cómo dividir una circunferencia en 4, 8, 16, ... partes iguales

Dada la circunferencia de centro *O* (fig. 44):

1. **Cuadrado.** Se trazan dos diámetros *AE* y *CG* perpendiculares entre sí, que dividen a la circunferencia en cuatro partes iguales.
2. **Octógono.** Si se trazan desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del cuadrado, estas cortarán a la circunferencia en cuatro puntos que, junto con los vértices del cuadrado, forman el polígono de ocho lados.
3. **Polígono de dieciséis lados.** Si se trazan nuevas perpendiculares a los lados del octógono, se obtiene la división de la circunferencia en dieciséis partes iguales.

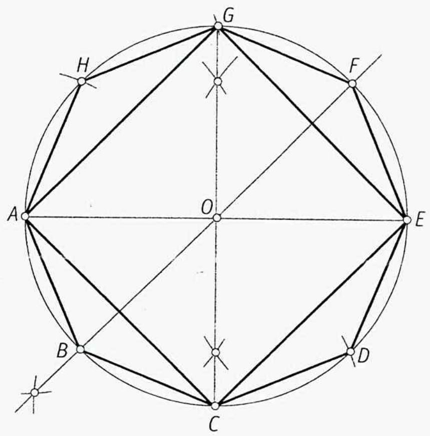


Figura 44

- Cómo dividir una circunferencia en 5, 10, ... partes iguales

Dada la circunferencia de centro *O* (fig. 45):

1. Se dibujan dos diámetros, *KL* y *AF*, perpendiculares entre sí.
2. Se divide el radio *OL* en dos partes iguales mediante el trazado de la mediatriz, con lo que se halla el punto *M*.
3. Con centro en *M* se describe un arco de radio *MA* hasta cortar al diámetro *KL* en el punto *N*.
4. **Pentágono.** El segmento *AN* es el lado l_5 del pentágono regular inscrito.
5. **Decágono.** El segmento *ON* es el lado l_{10} del decágono regular inscrito.

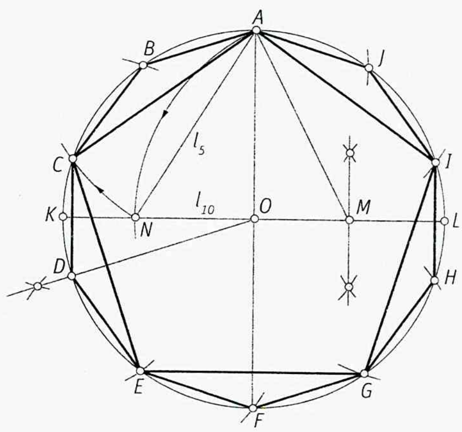


Figura 45

Cómo dividir una circunferencia en 7, 14, ... partes iguales

Dada la circunferencia de centro O (fig. 46):

1. Se traza un diámetro cualquiera HA.
2. **Heptágono.** Se traza la mediatriz del radio OA, que pasa por su punto medio, S, y corta a la circunferencia en los puntos P y Q. El segmento PS es el lado l_7 del heptágono.
3. **Polígono de catorce lados.** Si se trazan desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del heptágono, estas cortarán a la circunferencia en siete puntos que, junto con los vértices del heptágono, forman el polígono de catorce lados.

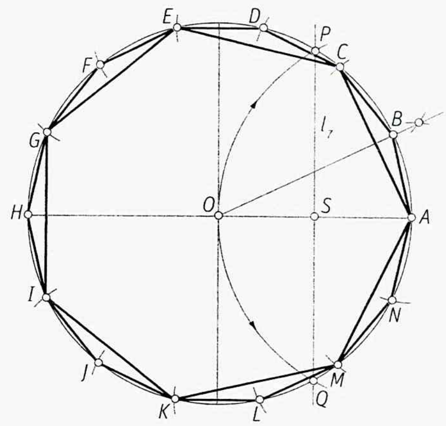


Figura 46

Cómo dividir una circunferencia en 9, 18, ... partes iguales

Dada la circunferencia de centro O (fig. 47):

1. Se trazan dos diámetros AQ y JK, perpendiculares entre sí.
2. Desde un extremo, K, de uno de los diámetros, se traza un arco con el mismo radio de la circunferencia, que corta a esta en el punto L.
3. Con centro en el otro extremo, J, del mismo diámetro, y radio JL, se traza un arco que corta a la prolongación del otro diámetro en el punto M.
4. Con centro en M y radio MJ se traza un nuevo arco que corta al diámetro AQ en el punto N.
5. **Eneágono.** El segmento AN es el lado l_9 del polígono regular de nueve lados.
6. **Polígono de dieciocho lados.** Si se trazan desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del eneágono, estas cortarán a la circunferencia en nueve puntos que, junto con los vértices del eneágono, forman el polígono de dieciocho lados.

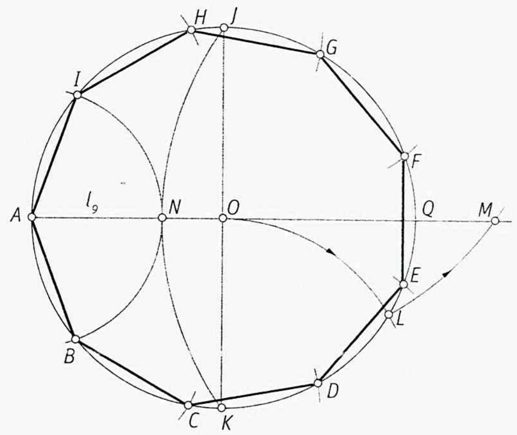


Figura 47

Cómo realizar la división aproximada de una circunferencia en un número cualquiera de partes iguales

Dada la circunferencia de centro O (fig. 48):

1. Se divide un diámetro AL de la circunferencia en el mismo número de partes iguales en que se desea dividir la circunferencia, y se numeran dichas divisiones. En este caso, se divide en once partes.
2. Con centros en los extremos A y L del diámetro anterior y con radio igual al diámetro se trazan dos arcos, que se cortan en el punto M.
3. El punto M se une con el punto número 2 del diámetro, y se prolonga dicha recta hasta que corte a la circunferencia en el punto B. El segmento AB es la división buscada y el lado aproximado del polígono correspondiente, en este caso un undecágono.

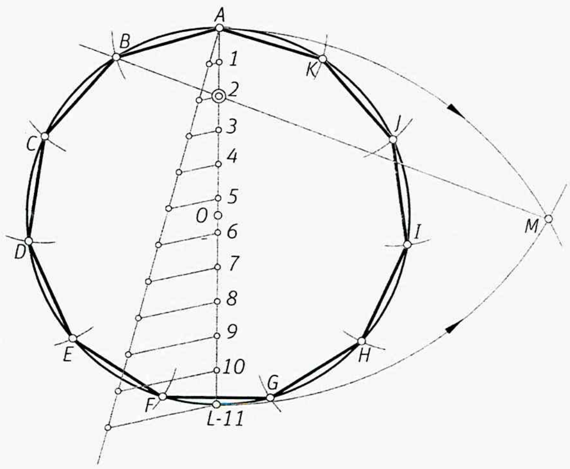


Figura 48

3.3. Construcción de polígonos regulares conociendo el lado

Cómo construir un pentágono regular

Dado el segmento *AB* (fig. 51):

1. Se prolonga el lado *AB*; se dibuja la mediatriz *s* del segmento *AB*, cuyo punto medio es *F*, y se traza la perpendicular *t* al lado *AB*, por uno de los extremos.
2. Se traza un arco con centro en *B* y radio *BA* hasta cortar en *G* a la perpendicular *t* trazada por *B*.
3. Se traza un segundo arco con centro en *F* y radio *FG* hasta cortar en *H* a la prolongación del lado *AB*.
4. Se traza un tercer arco con centro en *A* y radio *AH* (diagonal del pentágono regular) hasta cortar al primer arco en *C* y a la mediatriz *s* en *D*, vértices ambos del pentágono.
5. Con centros en *A* y *D* y radio *AB* se trazan dos arcos que se cortarán en *E*, el quinto y último vértice del pentágono.

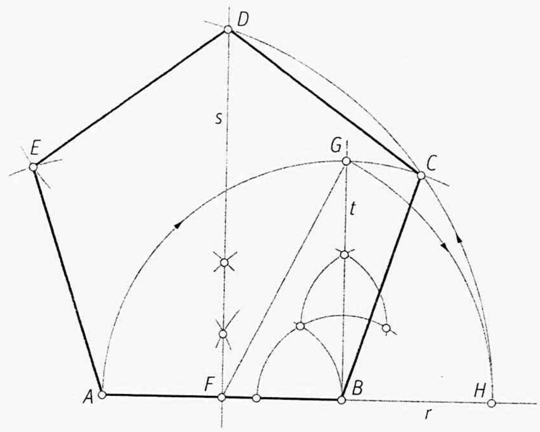


Figura 51

Cómo construir un heptágono regular

Dado el segmento *AB* (fig. 52):

1. Se trazan la mediatriz *s* del segmento *AB* y la perpendicular *t* al lado *AB* por el extremo *B*.
2. Con vértice en *A*, se construye un ángulo de 30°, cuyo lado corta a la perpendicular *t* en *H*.
3. Desde *A* y con radio *AH* se describe un arco de circunferencia que cortará a la mediatriz *s* en el punto *O*, centro de la circunferencia que inscribe al polígono de siete lados.
4. Con centro en *B* y con radio *AB* se traza un pequeño arco que cortará a la circunferencia en el punto *C*; con centro en *C* y con radio *AB* se traza otro arco que cortará a la circunferencia en el punto *D*, y así sucesivamente hasta obtener todos los vértices del heptágono.

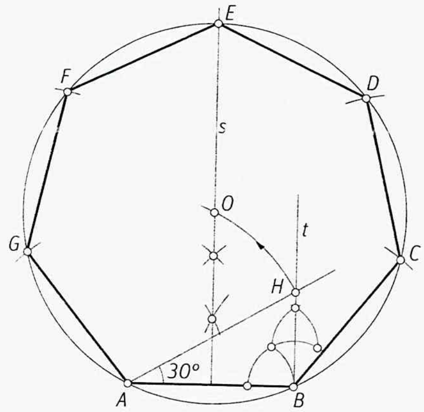


Figura 52

Cómo construir un octógono regular

Dado el segmento *AB* (fig. 53):

1. Se traza la mediatriz *s* del segmento *AB*, cuyo punto medio es *I*.
2. Se dibuja una circunferencia con centro en *I* y diámetro *AB*, que corta a la mediatriz en el punto *J*.
3. Con centro en *J* y radio *JA*, o *JB*, se traza otra circunferencia que corta a la mediatriz en el punto *O*, centro de la circunferencia que inscribe el octógono de lado *AB*.
4. Con centro en *B* y con radio *AB* se traza un pequeño arco que cortará a la circunferencia en el punto *C*; del mismo modo se van obteniendo los restantes puntos del octógono.

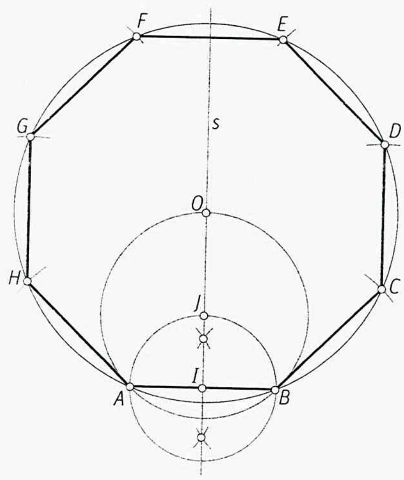


Figura 53

9

Cómo construir un eneágono regular

Dado el segmento *AB* (fig. 54):

1. Se traza la mediatriz *s* del segmento *AB*.
2. Con centro en *A* y radio *AB* se traza un arco que corta a la mediatriz en *J*.
3. Con centro en *J* y radio *JB* se traza un arco que corta a la mediatriz en *K*.
4. Con centro en *K* y radio *KJ* se traza un arco que corta a *s* en el punto *F*, vértice opuesto al lado *AB*.
5. Se une *A* con *F* y se traza la mediatriz de dicho segmento, que corta a la mediatriz de *AB* en el punto *O*, centro de la circunferencia circunscrita.
6. Con centro en *B* y con radio *AB* se traza un pequeño arco que cortará a la circunferencia en el punto *C*; del mismo modo se van obteniendo los restantes puntos del eneágono.

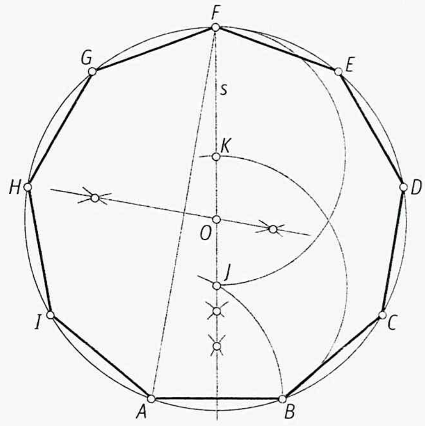


Figura 54

Cómo dibujar la construcción aproximada de un polígono de un número cualquiera de lados conociendo el lado

Primer método

1. Con centro en un punto *O* cualquiera se traza una circunferencia de radio arbitrario (fig. 55).
2. Se toma un diámetro *LM* cualquiera y se divide en tantas partes como lados tenga el polígono que se desea construir, numerando dichos puntos: *1*, *2*, ...
3. Con centros en *L* y *M* y radio *LM* se trazan dos arcos, que se cortan en *P*.
4. Se une el punto *P* con el punto *2*; la prolongación de dicha recta corta a la circunferencia en *Q*.
5. Se prolonga el segmento *LQ* y a partir del punto *L* se lleva la distancia *LR*, igual al lado del polígono que se desea construir.
6. Por el punto *R* se traza la paralela al radio *OL*, que corta a la prolongación del radio *OQ* en el punto *B*.
7. La distancia *OB* es el radio de la circunferencia que inscribe al polígono que se pide.

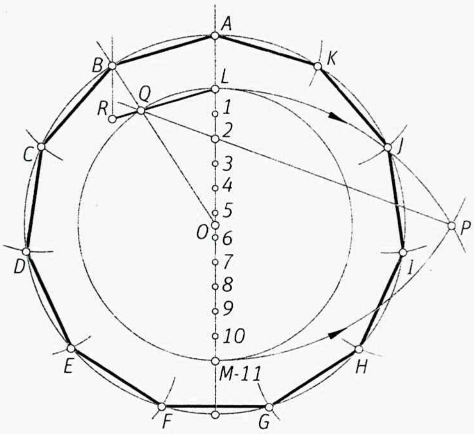


Figura 55

Segundo método

Dado el segmento *AB* (fig. 56):

1. Con radio *AB* y centros en *A* y en *B* se trazan dos arcos que se cortan en el punto *O* de la mediatriz. El punto *O* es el centro del hexágono de lado *AB*.
2. Con centro en el punto *O* y radio *OA* se dibuja la circunferencia que corta a la mediatriz de *AB* en el punto *C*.
3. Se divide el radio *OC* en seis partes iguales. Los puntos *7*, *8*, *9*, *10*, *11* y *12* son los centros de las circunferencias circunscritas a los polígonos de *7*, *8*, *9*, *10*, *11* y *12* lados, respectivamente.

En las figuras correspondientes a los dos ejemplos, se ha representado un **undecágono**.

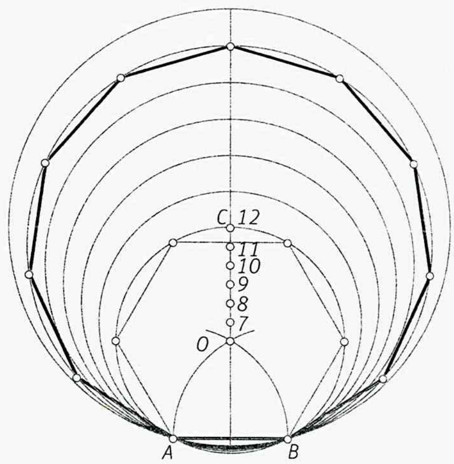


Figura 56

4 Construcción de polígonos estrellados

Para construir un polígono regular estrellado de un número determinado de vértices se debe dividir la circunferencia en tantas partes iguales como vértices tenga el polígono que se va a construir y unir dichos vértices de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc.

El número de polígonos estrellados que existen para un número *v* de vértices es igual al número de cifras primas con *v* (números que no tienen división exacta con *v*) que sean menores de *v*/2. Los vértices se unen de la manera que nos indican las cifras primas. En el siguiente cuadro se puede ver el número de polígonos estrellados que existen para un número determinado de vértices, así como la manera de unirlos:

v	p	n
5	1	2
6	0	–
7	2	2-3
8	1	3
9	2	2-4
10	2	3-4

v	p	n
11	4	2-3-4-5
12	1	5
13	5	2-3-4-5-6
14	4	3-4-5-6
15	4	2-4-6-7
...	...	...

En el cuadro, ***v*** es el número de vértices del polígono estrellado; ***p*** es el número de polígonos estrellados de *v* vértices, y ***n*** son los números primos con *v* menores de la mitad, que indican además la forma de unir los vértices.

Ten en cuenta

Para construir un polígono estrellado se ha de partir de un vértice, recorrer todos y cada uno de ellos, y cerrar en el mismo vértice donde se comenzó.

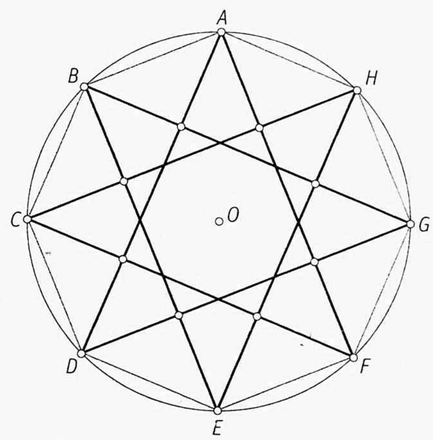


Figura 57

Cómo construir un octógono regular estrellado

Tal como se indica en la tabla anterior, solo existe un polígono estrellado de ocho vértices, ya que solo hay un número menor que 4 (8/2), que sea primo con 8: el 3.

Dada la circunferencia de centro *O* (fig. 57):

1. Se divide la circunferencia en ocho partes iguales.
2. Se unen los vértices de tres en tres, puesto que el número primo con 8 es el 3.

Cómo construir un eneágono regular estrellado

La tabla anterior indica que existen dos polígonos estrellados de nueve vértices, puesto que hay dos números menores de 4,5 (9/2) que son primos con 9: el 2 y el 4.

Dada la circunferencia de centro *O*:

1. Se divide la circunferencia en nueve partes iguales.
2. Para obtener el primer polígono estrellado, se unen los vértices de dos en dos (fig. 58a), ya que un número primo con 9 es el 2.
3. Para obtener el segundo polígono estrellado, se unen los vértices de cuatro en cuatro (fig. 58b), pues el otro número primo con 9 es el 4.

Si se intentan unir los vértices de tres en tres, se obtienen tres triángulos equiláteros girados uno respecto del otro, pero que no forman un polígono regular estrellado.

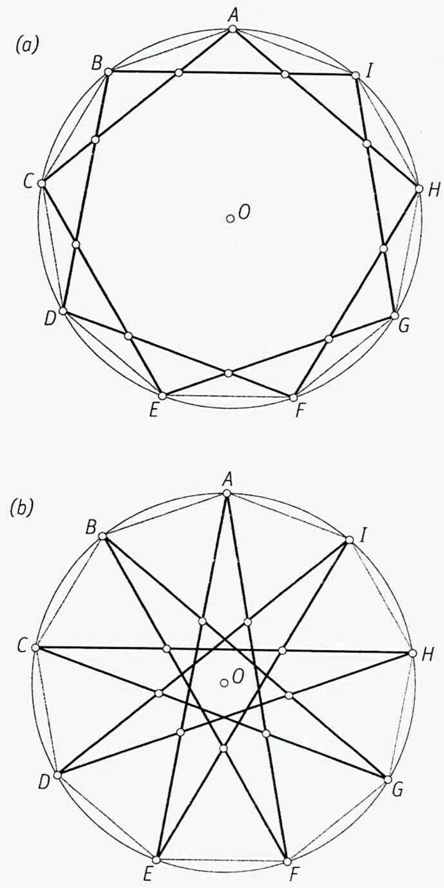


Figura 58

Cómo construir un undecágono regular estrellado

Existen cuatro polígonos regulares estrellados de once vértices, puesto que hay cuatro números menores de 5,5 (11/2) que son primos con 11: el 2, el 3, el 4 y el 5.

Dada la circunferencia de centro O:

1. Se divide la circunferencia en once partes iguales.
2. Se unen los vértices de dos en dos (fig. 59a), ya que un número primo con 11 es el 2.
3. Se unen los vértices de tres en tres (fig. 59b), pues otro número primo con 11 es el 3.
4. Se unen los vértices de cuatro en cuatro (fig. 59c), pues el cuatro es también número primo con 11.
5. Por último, se unen los vértices de cinco en cinco (fig. 59d), ya que el cinco es también primo con 11.

No hay más polígonos estrellados de once vértices, puesto que, aunque el número seis es también primo con once, es ya mayor de 5,5.

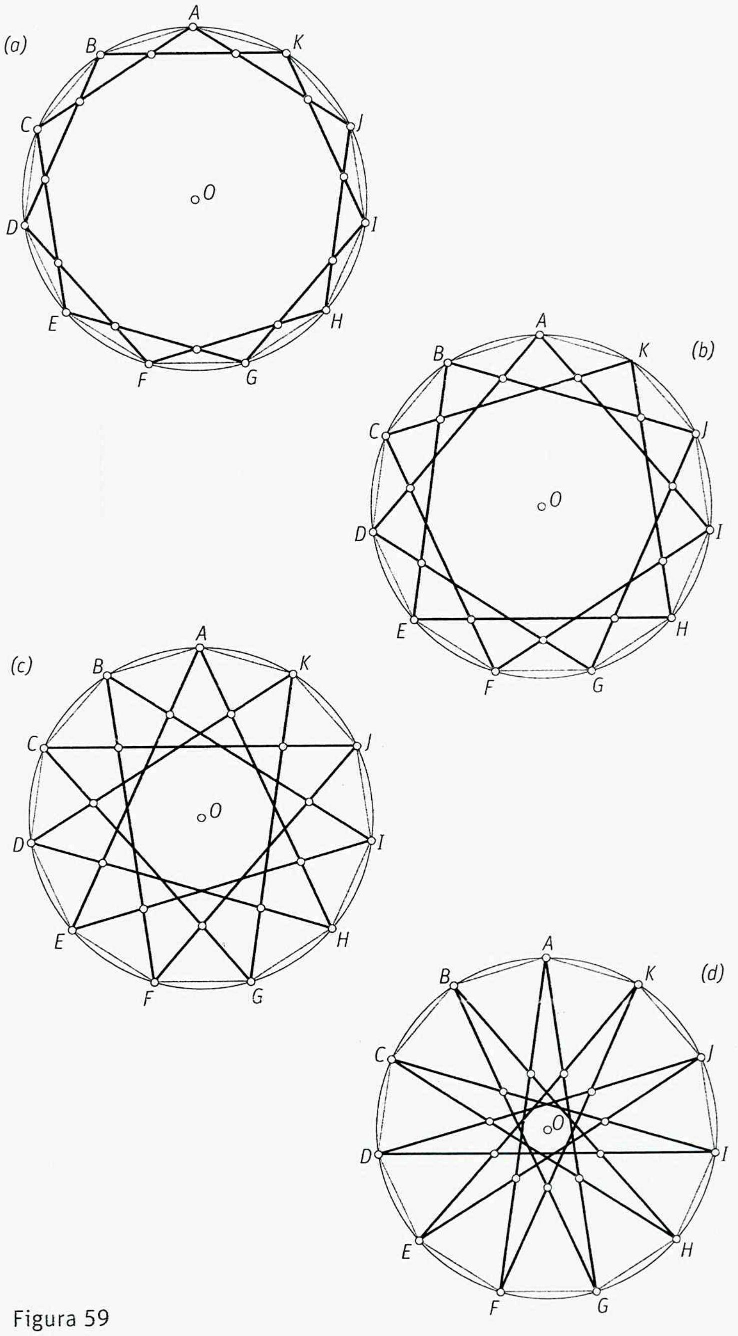


Figura 59

Ten en cuenta

Muchas de las figuras geométricas empleadas en la decoración a lo largo de la historia están basadas en la construcción de polígonos estrellados (fig. 60).

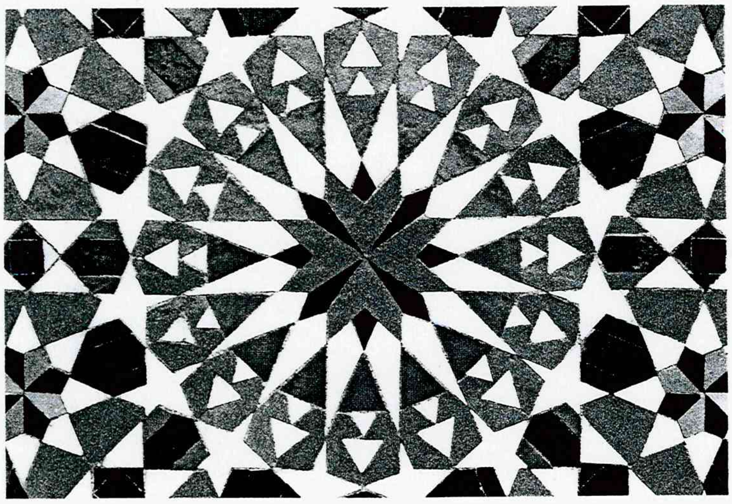


Figura 60

EJERCICIOS RESUELTOS

10 **Dibuja un polígono regular estrellado de seis vértices de radio 20 mm.**

Solución:

No hay ningún polígono regular estrellado de seis vértices, porque no hay ningún número primo con seis menor de tres. Si, una vez dividida la circunferencia en seis partes iguales (fig. 61), se unen los vértices de dos en dos, se obtienen dos triángulos equiláteros, pero no forman un polígono estrellado.

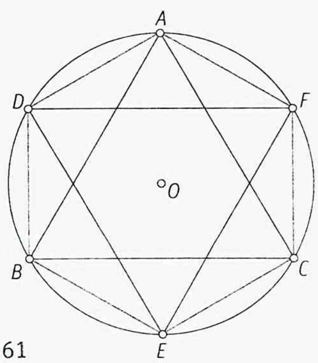


Figura 61

1 Proporcionalidad y sección áurea

Se llama **proporción** a la relación o correspondencia que hay entre dos magnitudes.

1.1. Media proporcional entre dos segmentos

Sean los segmentos $a = AB$ y $b = CD$. La media proporcional x a los segmentos a y b se expresa así:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Cómo construir la media proporcional

1. Sobre una recta r (fig. 1) se trasladan los segmentos $AB = a$ y $CD = b$ y, con centro en E, punto medio de AD, se traza la semicircunferencia de diámetro AD.
2. La perpendicular a la recta r trazada por B-C corta a la circunferencia en el punto F. El segmento $x = BF$ es la media proporcional entre AB y CD.

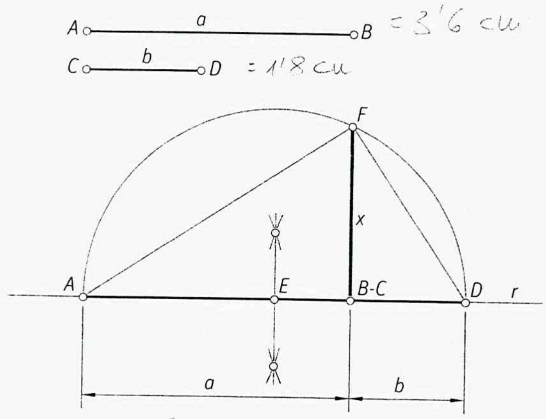


Figura 1

Teorema de la altura. En todo triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que queda dividida la hipotenusa.

Iste teorema es la aplicación directa de la construcción de la media ›roporcional entre dos segmentos (fig. 1).

1.2. Teorema del cateto

Teorema del cateto. En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.

ean los segmentos $a = AB$ y $b = CD$ (fig. 2):

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

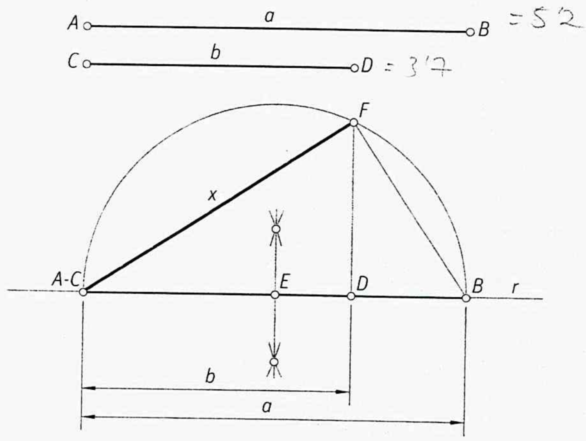


Figura 2

Cómo representar gráficamente el teorema del cateto

1. Sobre una recta r se trasladan, a partir de un mismo punto A-C, los segmentos $AB = a$ y $CD = b$, y se dibuja la semicircunferencia de diámetro AB, el mayor de los dos segmentos.
2. Por el punto D se traza la perpendicular a la recta r hasta cortar a la semicircunferencia en el punto F. El segmento $x = AF$ es la media proporcional entre los dos segmentos dados.

.3. Teorema de Tales

teorema de Tales, llamado así en memoria de Tales de Mileto 24-548 a. C.), es la base del estudio de la proporcionalidad:

Teorema del Tales. Si dos rectas r y s son cortadas por rectas paralelas, estas determinan en r y s segmentos proporcionales.

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CD}{FG} = \frac{BD}{EG} = \dots \quad \text{(fig. 3)}$$

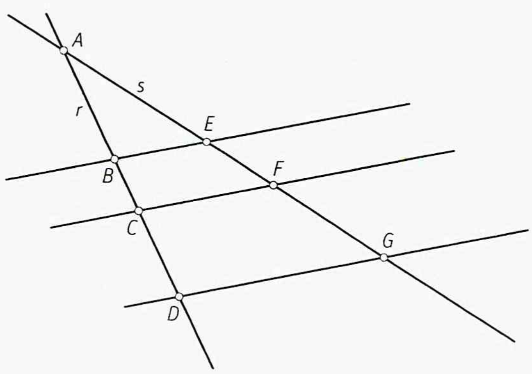


Figura 3

.4. Tercera proporcional entre dos segmentos

ean los segmentos $a = AB$ y $b = CD$. La **tercera proporcional** x a dos egmentos a y b se expresa así:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Cómo construir la tercera proporcional a dos segmentos dados

1. Se trazan dos rectas r y s que se corten (fig. 4). A partir del punto A de intersección, se lleva AB sobre la recta r y CD sobre la recta s.
2. Con centro en A y radio AD se describe un arco que corta a la recta r en el punto E.
3. Por el punto E se traza la recta paralela a BD que corta a la recta s en el punto F. El segmento $AF = x$ es la tercera proporcional.

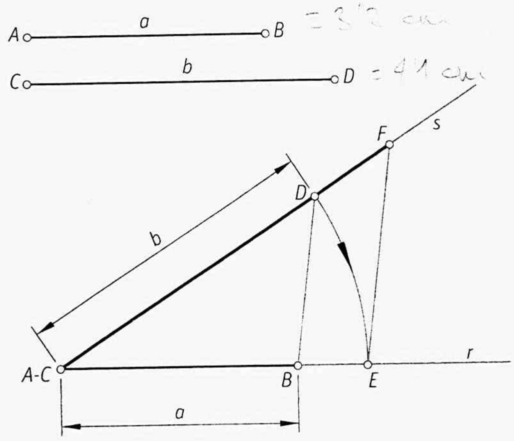


Figura 4

1.5. Cuarta proporcional a tres segmentos

Sean los segmentos $a = AB$, $b = CD$ y $c = EF$. La **cuarta proporcional** x a tres segmentos a, b y c se expresa así:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Cómo construir la cuarta proporcional a tres segmentos dados

1. Se trazan dos rectas r y s que se corten (fig. 5). A partir del punto A de intersección, se lleva AB sobre la recta r y CD sobre la recta s. Sobre la recta r y a continuación del segmento AB, se lleva el segmento EF.
2. Por el punto F se traza la recta paralela a BD que corta a la recta s en el punto G. El segmento $DG = x$ es la cuarta proporcional.

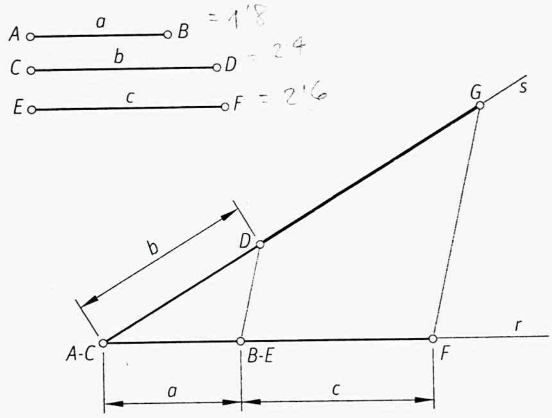


Figura 5

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Dado el triángulo equilátero OAB de lado 20 mm y la circunferencia de centro O que pasa por A y B, dibuja una cuerda en la circunferencia de modo que quede dividida en tres partes iguales por los radios OA y OB.**

Solución:

1. Sobre las prolongaciones de la cuerda AB (fig. 6) se trasladan las magnitudes $AC = BD = AB$.
2. Las rectas que unen los puntos C y D con el centro O cortan a la circunferencia en E y F.
3. La cuerda EF queda dividida en tres partes iguales por los radios OA y OB.

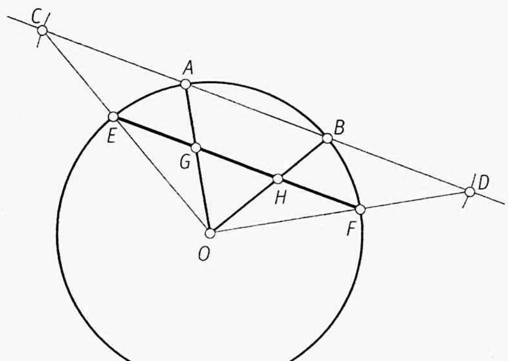


Figura 6

2 **Dado el segmento $a = 39$ mm, halla el segmento b de manera que $a/b = 16$ mm.**

Solución:

1. Se trazan dos rectas r y s cualesquiera (fig. 7).
2. Sobre la recta r se trasladan los siguientes segmentos: $AB = a/b = 16$ y $BC = a = 39$, y sobre la recta s se traslada el segmento $AD = 10$ mm.
3. Se unen los puntos B y D y por el punto C se traza la paralela CE a la recta BD. El segmento $DE = b$ es el resultado.

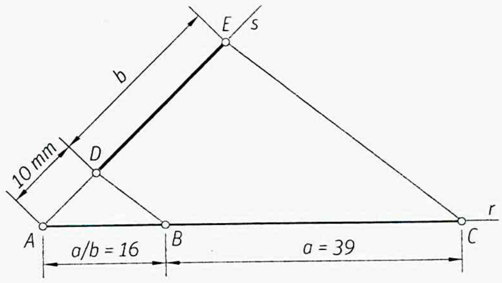


Figura 7

2 Igualdad

De forma genérica, dos elementos son iguales si tienen el mismo valor. El concepto de igualdad geométrica es equivalente al de igualdad matemática, por ejemplo: 3 + 2 = 5.

Dos figuras son **iguales** (fig. 14) cuando sus lados y sus ángulos son iguales y, además, están en el mismo orden.

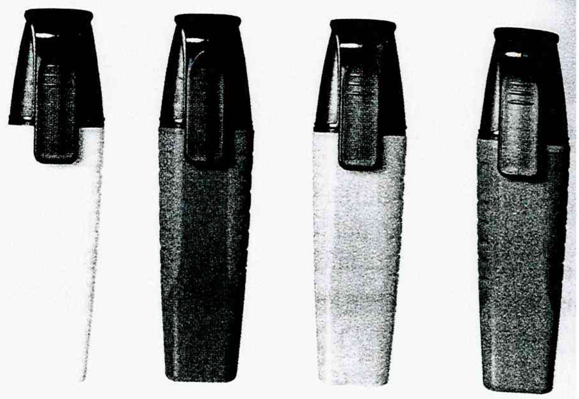


Figura 14

Cómo construir una figura igual a otra por copia de ángulos

Dado el polígono *ABCDE* (fig. 15):

1. Sobre una recta *r* cualquiera se toma un segmento *A'B'* = *AB*.
2. Con centro en el vértice *B'* se traza un ángulo igual al del vértice *B*, del siguiente modo:
   - Con centro en *B* se dibuja un arco que corta a los lados del ángulo en los puntos *F* y *G*; con centro en *B'* se dibuja otro arco del mismo radio que el anterior;
   - Con radio *FG* y centro en *F'* se traza un arco que corta al último en el punto *G'*; uniendo el punto *G'* con *B'* se obtiene el ángulo buscado.
3. Sobre el lado obtenido en el punto anterior se toma el segmento *B'C'* = *BC*.
4. Con centro en el punto *C'* se dibuja un ángulo igual al del vértice *C*, repitiendo la operación 2. De este modo se van construyendo sucesivamente los lados y los ángulos hasta cerrar el polígono.

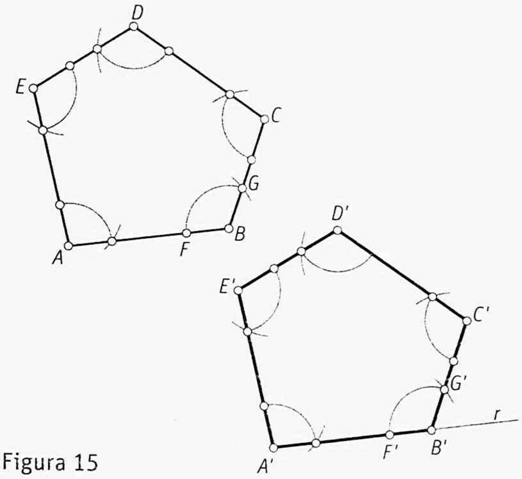


Figura 15

Cómo construir una figura igual a otra por coordenadas

Dado el polígono *ABCDE* (fig. 16):

1. Se dibujan dos ejes coordenados *X* e *Y* cualesquiera.
2. Se proyectan todos los vértices de la figura sobre el eje *X* (puntos A_x, B_x, C_x, etc.) y sobre el eje *Y* (puntos A_y, B_y, C_y, etc.).
3. Sobre dos nuevos ejes coordenados cualesquiera *X'* e *Y'* se llevan, desde el origen, las distancias $O'A'_x = OA_x$, $O'B'_x = OB_x$, $O'C'_x = OC_x$, etc., sobre el eje *X'*, y $O'A'_y = OA_y$, $O'B'_y = OB_y$, $O'C'_y = OC_y$, etc., sobre el eje *Y'*.
4. Por los puntos hallados anteriormente se trazan perpendiculares a los ejes respectivos *X'* e *Y'*, de forma que los puntos de intersección son los vértices del nuevo polígono *A'B'C'D'E'*.

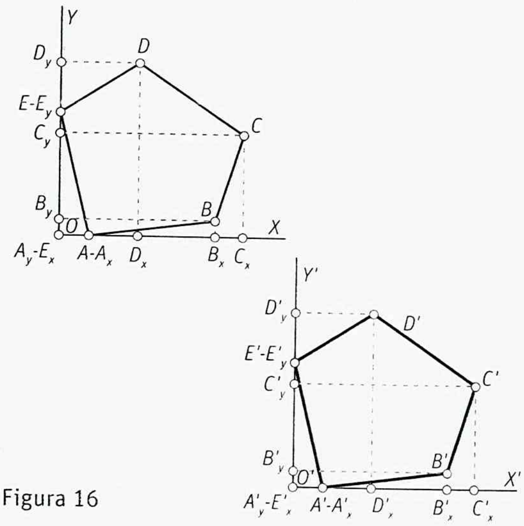


Figura 16

Cómo construir una figura igual a otra por radiación

Dado el polígono *ABCDE* (fig. 17):

1. Se elige un punto *O* cualquiera, dentro o fuera del polígono, y se une a continuación con todos y cada uno de los vértices.
2. Con centro en el punto *O* y radio arbitrario se traza una circunferencia cualquiera, y con centro en otro punto exterior *O'* se traza otra circunferencia de radio igual a la anterior.
3. Por copia de ángulos, se van trazando todas las rectas que parten del punto *O'*. Sobre cada uno de los rayos se llevan las distancias *O'A'* = *OA*, *O'B'* = *OB*, *O'C'* = *OC*, etc.

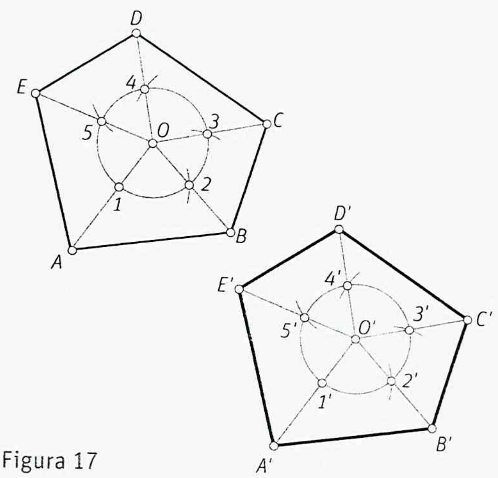


Figura 17

Cómo construir una figura igual a otra por triangulación

Este método es similar al anterior, salvo que en vez de elegir un punto cualquiera, se elige uno de los vértices del polígono *ABCDE* (fig. 18).

1. Se une un vértice, por ejemplo el *A*, con todos los demás vértices.
2. Por copia de triángulos, se van construyendo los triángulos *A'B'C'*, *A'C'D'* y *A'D'E'*, iguales a los triángulos *ABC*, *ACD* y *ADE* del polígono dado.

También se puede trazar una circunferencia de radio arbitrario con centro en *A* y, a continuación, aplicar el procedimiento anterior, por radiación.

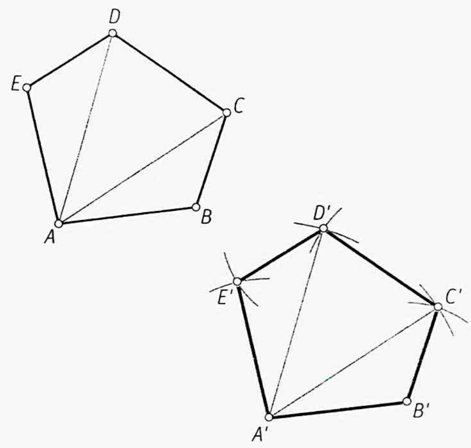


Figura 18

EJERCICIOS RESUELTOS

3 **Dibuja un triángulo isósceles, cuya base de 30 mm es la parte áurea del otro lado.**

Solución:

1. Se traza la mediatriz de la base *AB* = 30 mm para determinar su punto medio *C* y, a continuación, se traza la perpendicular por el extremo *B* (fig. 19).
2. Con centro en *B* se traza un arco que pasa por *C* y corta a la perpendicular en el punto *D*.
3. Con centro en *D* y radio *DB* se traza otro arco que corta a la prolongación de la recta *AD* en el punto *E*.
4. El segmento *AE* es el otro lado del triángulo isósceles. Por tanto, con radio *AE* y centros en *A* y en *B* se trazan dos arcos que se cortan en el punto *F*, que será el tercer vértice del triángulo.

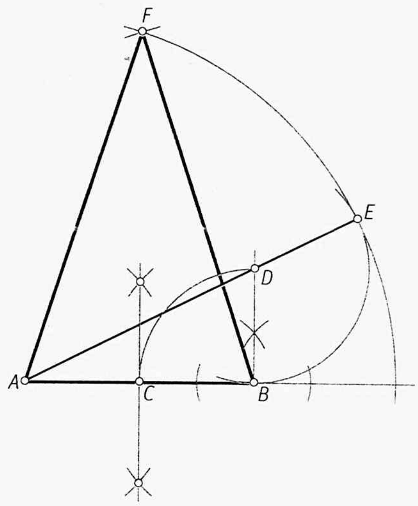


Figura 19

4 **Dada la pajarita y un punto *O* exterior a ella** (fig. 20)**, construye por triangulación una figura igual conociendo el punto *O'* donde debe estar situada.**

Solución:

1. Se une el punto *O* con todos y cada uno de los vértices de la figura, trazando también por *D* una recta horizontal y por *O* una recta vertical que se cortan en el punto *M*.
2. Por el punto *O'* se traza la recta *O'M'* = *OM* (fig. 20) y por el punto *M'* se traza la recta horizontal *r* sobre la que se marcan los puntos *D'* y *E'* a partir del centro *O'*.
3. Por triangulación se construyen los triángulos *O'E'C'* y *O'C'A'*.
4. Con centro en *O'* se van trasladando las distancias *O'F'* y *O'G'* sobre la recta *E'C'*, *O'B'* sobre la recta *A'C'* y *O'J'* sobre la recta *A'E'*.

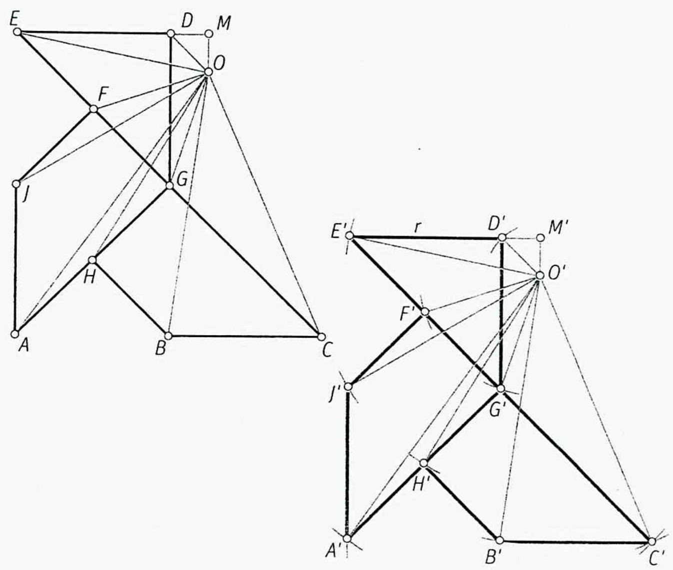


Figura 20

16

3 Semejanza

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales (fig. 21).

La proporcionalidad entre los lados, es decir, el cociente entre las magnitudes homólogas, se denomina **razón de semejanza**.

Figura 21

Cómo construir una figura directamente semejante a otra a partir de la razón de semejanza (por radiación)

Dado el polígono *ABCDE* (fig. 22), supongamos que la razón de semejanza es 2/3:

1. Se toma un punto arbitrario *O* y se une con todos los vértices del polígono dado. Uno de los segmentos así hallados, por ejemplo *OA*, se divide en tantas partes como indique el denominador de la razón de semejanza, en nuestro caso 3, y a partir del punto *O* se toman tantas partes como indique el numerador. El punto así hallado, *A'*, es el punto homólogo del *A*.
2. Por el punto *A'* se traza la paralela a la recta *AB* hasta cortar a la recta *OB* en el punto *B'*. Por el punto *B'* se traza la paralela a la recta *BC* hasta cortar a la recta *OC* en el punto *C'*, y así sucesivamente hasta cerrar el polígono.

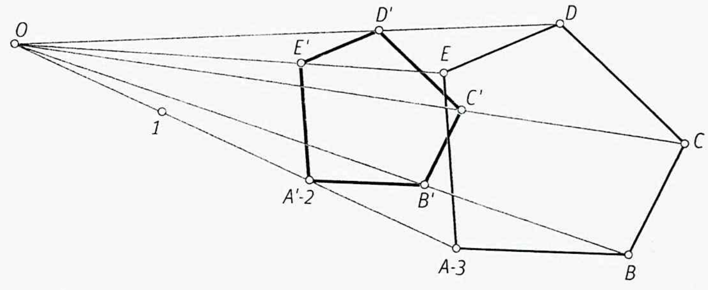


Figura 22

Cómo construir una figura directamente semejante a otra a partir de la razón de semejanza (por coordenadas)

Dado el polígono *ABCDE* (fig. 23), supongamos que la razón de semejanza es, como en el caso anterior, 2/3:

1. Se dibujan dos ejes coordenados *X* e *Y* cualesquiera y se proyectan los vértices de la figura sobre el eje *X* (puntos A_x, B_x, C_x, etc.) y sobre el eje *Y* (puntos A_y, B_y, C_y, etc.).
2. Sobre dos nuevos ejes coordenados *X'* e *Y'* se llevan, a partir de *O'*, las distancias $O'A'_x = (2/3)(OA_x)$, $O'B'_x = (2/3)(OB_x)$, $O'C'_x = (2/3)(OC_x)$, etc., sobre el eje *X'*, y $O'A'_y = (2/3)(OA_y)$, $O'B'_y = (2/3)(OB_y)$, etc., sobre el eje *Y'*.
3. Por los puntos hallados anteriormente se trazan perpendiculares a los ejes *X'* e *Y'*. Los puntos de intersección son los vértices del polígono *A'B'C'D'E'*, semejante al dado.

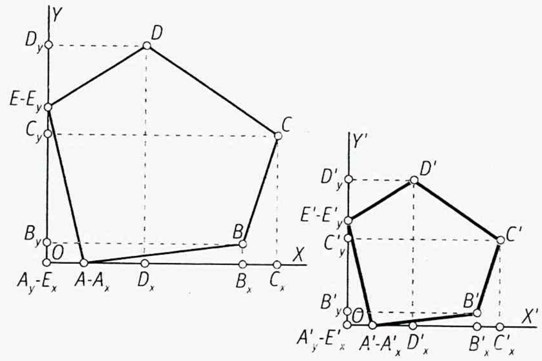


Figura 23

Cómo construir una figura inversamente semejante a otra

En este caso la razón de semejanza es negativa. Se actúa también "por radiación", salvo que las partes que indica el numerador se toman en sentido contrario a las partes del denominador (fig. 24).

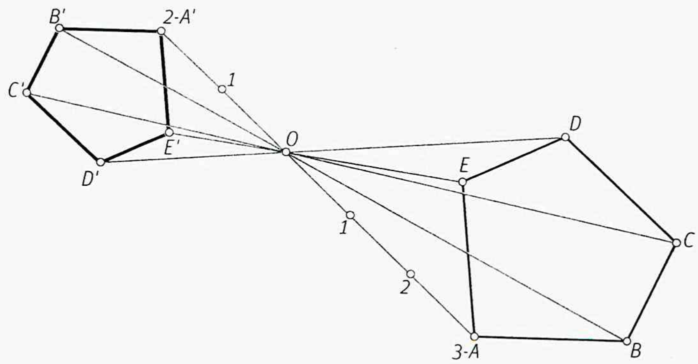


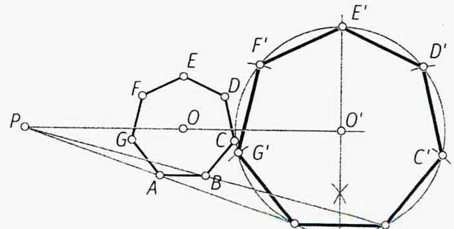
Figura 24

EJERCICIOS RESUELTOS

5 **Construye un polígono de lados proporcionales al heptágono regular dado y cuyo lado *A'B'* mida 18 mm.**

Solución:

1. Se sitúa *A'B'* paralelo al lado *AB* (fig. 25). Las rectas que unen los puntos *A* con *A'* y *B* con *B'* se cortan en el punto *P*, centro de semejanza.
2. La mediatriz del lado *A'B'* se corta con la recta *PO* en *O'*. Con centro en *O'* y radio *O'A'* se traza la circunferencia que contiene al heptágono regular pedido.



(escala 2:3)

Figura 25

2 Homotecia

El concepto de **transformación** en geometría es equivalente al concepto de **función** en álgebra.

Una **transformación geométrica** es una correspondencia (o aplicación) entre elementos de dos formas geométricas.

Una **transformación proyectiva** es tal que cuatro puntos en línea recta se transforman en otros cuatro puntos en línea recta, siendo la razón doble de los cuatro primeros igual a la razón doble de los cuatro segundos.

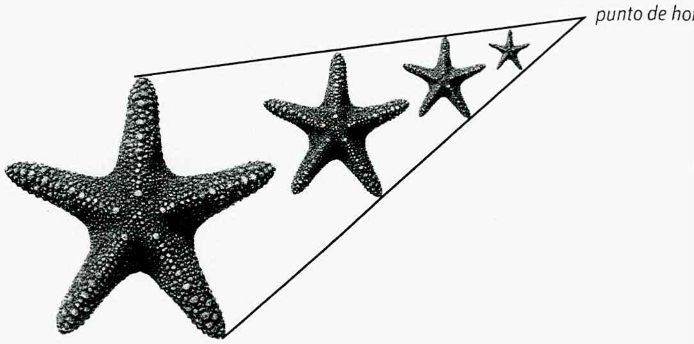


Figura 6

2.1. Homotecia

Las escalas son un ejemplo de aplicación de la homotecia (fig. 6).

La **homotecia** es una transformación que cumple las siguientes leyes (fig. 7):

- Dos puntos homotéticos *A* y *A'* están alineados con un punto fijo *O* llamado **centro de homotecia**.
- Dos rectas homotéticas *a* y *a'* son paralelas.

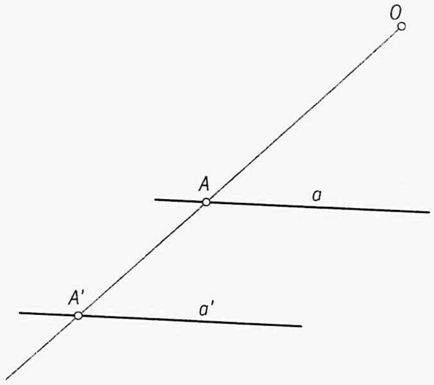


Figura 7

Razón de la homotecia

Razón o **coeficiente de homotecia** es la razón entre las distancias que hay desde el centro *O* hasta los puntos homotéticos *A* y *A'*.

$$k = \frac{OA}{OA'}$$

Ten en cuenta

- Si el coeficiente de homotecia es positivo, ambos puntos están al mismo lado del centro de homotecia, y si es negativo, están a distinto lado.
- Para definir una homotecia basta con conocer uno de estos datos: el centro y dos puntos homotéticos; el centro y la razón de homotecia, o bien dos figuras homotéticas.

EJERCICIOS RESUELTOS

3 Halla el homotético *B'* de un punto *B* (fig. 8), conociendo el centro de homotecia *O* y un par de puntos homotéticos *A* y *A'*.

Solución:

Por *A'* se traza una recta *a'* paralela a la recta *a* que une los puntos *A* y *B*. El punto *B'* es la solución.

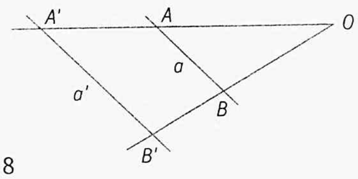


Figura 8

4 Dado el triángulo *ABC*, con *AB* = 60 mm, *BC* = 55 mm y *AC* = 35 mm (fig. 9), dibuja un cuadrado inscrito en el mismo.

Solución:

1. Dado el triángulo *ABC*, a partir de un segmento *DG* arbitrario, perpendicular al lado *AB*, se dibuja el cuadrado *DEFG*.
2. La recta que une los puntos *A* y *F* corta al lado *BC* del triángulo en el punto *H*.
3. Por el punto *H* se traza la perpendicular *HK* y la paralela *HL* al lado *AB*, y por *L* se traza la perpendicular *LJ*, con lo que se obtiene el cuadrado *JKHL* que se pide.

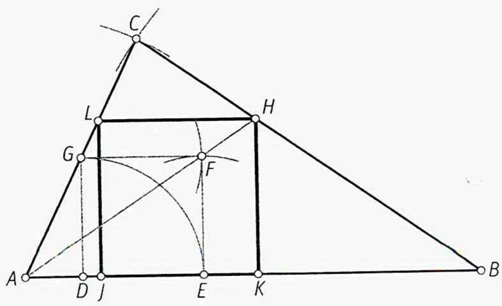


Figura 9

3 Simetría

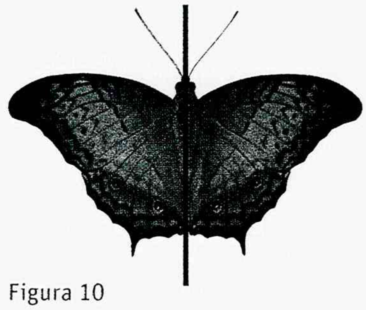


Figura 10

Todos tenemos una idea intuitiva de la simetría, pues esta aparece en múltiples ocasiones en la naturaleza, por ejemplo, en ciertos animales (fig. 10). Pero la simetría está presente en muchos otros ámbitos, como la geometría, la música, la física, etc.

3.1. Simetría central

La **simetría central** es una transformación geométrica en la que se cumplen las siguientes leyes (fig. 11):

- Dos puntos simétricos A y A' están alineados con un punto O fijo llamado **centro de simetría**.
- Los dos puntos están a distinto lado y a igual distancia del centro ($OA = -OA'$).

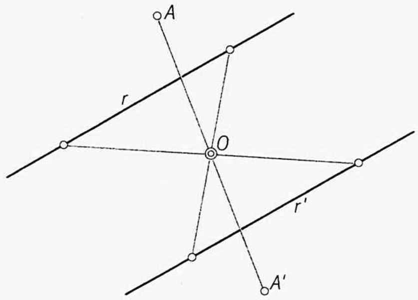


Figura 11

3.2. Simetría axial

La **simetría axial** es una transformación que cumple las siguientes leyes (fig. 12):

- La recta que une dos puntos simétricos A y A' es perpendicular a un eje e, llamado **eje de simetría**.
- Los dos puntos se encuentran a distinto lado e igual distancia del eje ($A_0A = -A_0A'$).

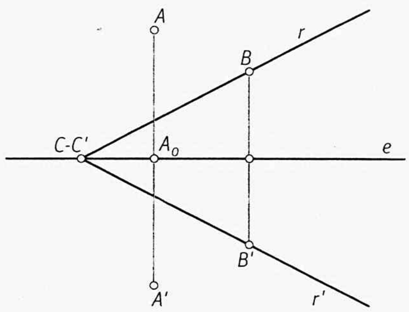


Figura 12

EJERCICIOS RESUELTOS

5 Construye la figura simétrica del polígono *ABCDE* respecto del punto *O* (fig. 13):

Solución:

1. Se une el punto A con el centro O, y se lleva sobre dicha recta y en sentido contrario el segmento $OA' = OA$.
2. Se une el punto B con el centro O e, igual que con el punto anterior, se lleva la distancia $OB' = OB$. Del mismo modo se obtienen los restantes puntos.

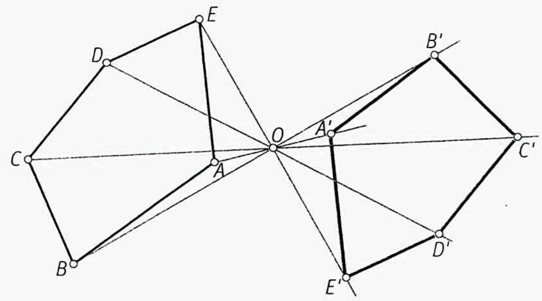


Figura 13

6 Construye la figura simétrica del polígono *ABCDE* (fig. 14) **respecto del eje *e*.**

Solución:

1. Por el punto A se traza la recta perpendicular al eje e, y se lleva sobre dicha recta y en sentido contrario el segmento $A_0A' = A_0A$.
2. Se traza por el punto B la recta perpendicular al eje e y, como con el punto anterior, se lleva la distancia $B_0B' = B_0B$, y así sucesivamente.

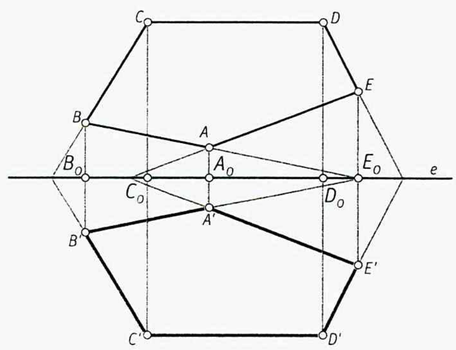


Figura 14

4 Traslación

En el mundo que nos rodea, entendemos por traslación el movimiento que cambia de lugar una cosa (fig. 15).

En geometría se denomina transformación al hecho de mover algo; por tanto, entendemos por **traslación** la transformación geométrica mediante la cual cada punto de un objeto se mueve una distancia constante en una dirección determinada.

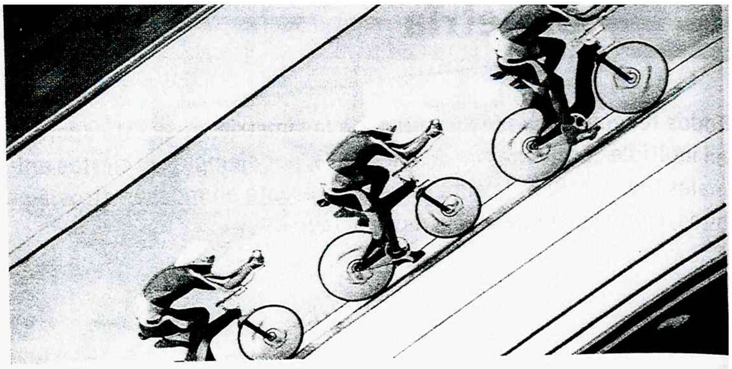


Figura 15

4.1. Traslación

La **traslación** es una transformación que cumple las siguientes reglas (fig. 16):

- La recta que une dos puntos homólogos *A* y *A'* es paralela a una dirección de traslación *d*.
- Dos rectas homólogas *a* y *a'* son paralelas.

Ten en cuenta

De la definición anterior se deduce que todos los puntos de una figura se trasladan la misma distancia según una misma dirección y sentido (fig. 17).

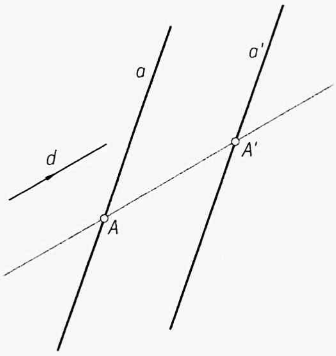


Figura 16

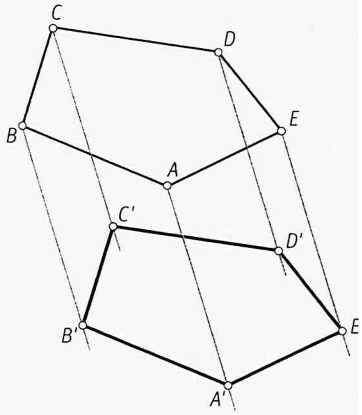


Figura 17

EJERCICIOS RESUELTOS

7 **Dadas dos rectas paralelas *r* y *s* (fig. 18) y una tercera *t* no paralela, construye un triángulo *ABC* (*AB* = 20 mm, *BC* = 25 mm y *AC* = 15 mm) que tenga un vértice en cada recta.**

Solución:

1. Con centro en un punto *A* cualquiera de la recta *r* y radio *AB*, se traza un arco hasta cortar a la recta *s* en el punto *B*.
2. Con centro en *A* y radio *AC* y con centro en *B* y radio *BC* se dibujan dos arcos, que se cortan en el punto *C*.
3. Se traslada el triángulo *ABC*: por el punto *C* se traza una recta paralela a las rectas *r* y *s* hasta cortar a *t* en el punto *C'*.
4. Por *C'* se trazan las paralelas a *AC* y a *BC*, que cortan a *r* y *s* en los puntos *A'* y *B'*, respectivamente.

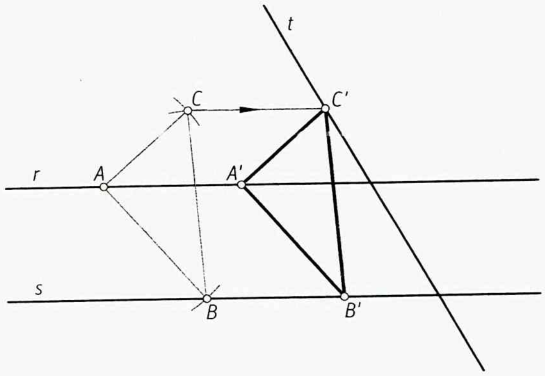


Figura 18

8 **Dibuja un segmento paralelo al segmento *AB* (fig. 19) e igual a él, cuyos extremos estén situados uno en cada una de las circunferencias dadas.**

Solución:

1. A partir del punto *O*, centro de una de las circunferencias dadas, se traza el segmento *OP*, igual y paralelo al segmento *AB* dado (fig. 19).
2. Con centro en *P* y radio igual al de la circunferencia de centro *O* se traza una nueva circunferencia, que corta a la de centro *O'* en los puntos *D* y *D'*.
3. A partir de los puntos *D* y *D'* se trazan dos rectas paralelas al segmento *AB*, que cortan a la circunferencia de centro *O* en los puntos *C* y *C'*. Los segmentos *CD* y *C'D'* son las dos soluciones del ejercicio.

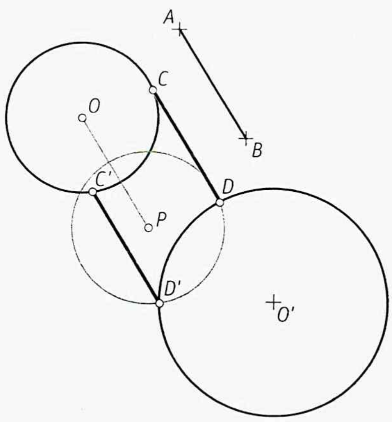


Figura 19

5 Giro

El concepto de girar se puede definir como dar vueltas alrededor de un eje o en torno a un punto.

En el espacio, por ejemplo, los satélites giran alrededor de su eje; también giran alrededor de su eje las ruedas de cualquier vehículo, las agujas de un reloj o las paletas de un aerogenerador (fig. 20); los caballos de un tiovivo giran alrededor del poste central, etc.

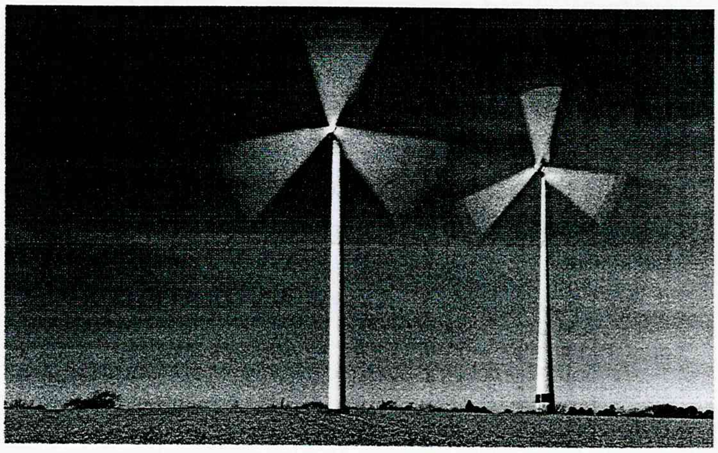


Figura 20

5.1. Giro

Dados un punto O, un ángulo φ y un sentido, el **giro** es una transformación tal que a un elemento A le corresponde un elemento A', de modo que se cumplen las siguientes reglas (fig. 21):

- La distancia de ambos puntos, A y A', a un punto fijo O, llamado **centro de giro**, es constante ($OA = OA'$).
- El ángulo que se forma al unir los dos puntos con el centro de giro, y su sentido, es igual a un ángulo dado, llamado **ángulo de giro** (ángulo $AOA' = \varphi$).

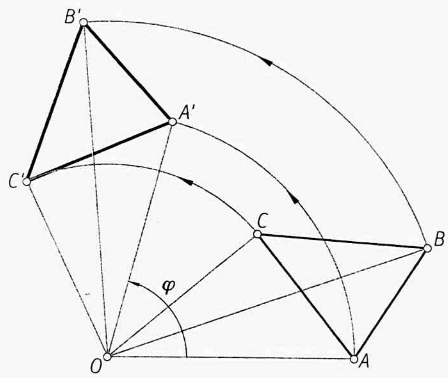


Figura 21

Ten en cuenta

El centro de giro O es el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos que unen puntos homólogos, AA', BB', etc.

EJERCICIOS RESUELTOS

9 **Gira la recta r dada en el sentido de las agujas del reloj, si el centro de giro es O y el ángulo de giro, φ (fig. 22).**

Solución:

1. Por el punto O se traza la perpendicular a r, con lo que se halla A.
2. Con centro en O y ángulo φ se gira el punto A hasta la posición A'. Por A' se traza la recta r', perpendicular a OA'.

Para girar cualquier otro punto, B, de la recta r basta con trazar un arco BB' de centro O hasta cortar a la recta girada r' en el punto B'. Por supuesto, el ángulo $\varphi = AOA'$ es igual al ángulo BOB'.

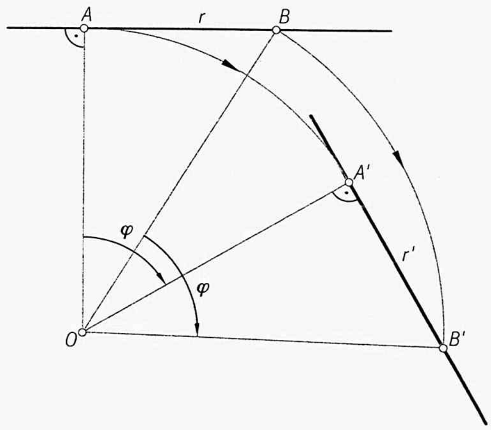


Figura 22

10 **Dados los cuadrados $ABCD$ y $A'B'C'D'$, iguales y girados (fig. 23), halla el centro de giro.**

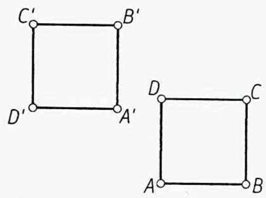


Figura 23 *(escala 1:2)*

Solución:

1. Se dibuja la mediatriz de los segmentos AA' y CC', que se cortan en el punto O, centro de giro (fig. 24).
2. El ángulo que forman las rectas OA y OA' es igual al ángulo de giro.

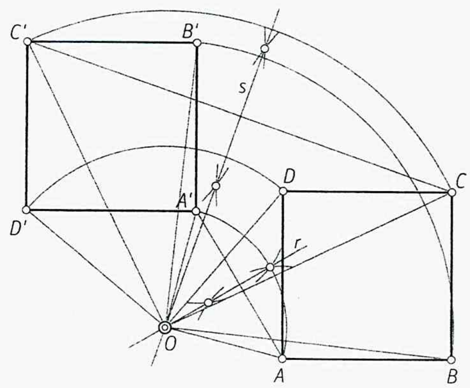


Figura 24

1 Tangencias

Se pueden encontrar aplicaciones de las tangencias en muchos lugares: en las máquinas laminadoras, en los rodillos que emplean las máquinas de prensa, en los engranajes de la maquinaria de un reloj, en diseños arquitectónicos (fig. 1) y ornamentales, en el trazado de los enlaces de las autopistas, etc.

Dos elementos son **tangentes** si tienen puntos comunes sin llegar a cortarse.

Para un estudio sistematizado de las tangencias entre circunferencias y rectas, identificaremos con su inicial los elementos geométricos de los que se parte:

R: radio

p: punto

r: recta

c: circunferencia

El estudio de las tangencias se puede dividir en tres grandes apartados, según sea el elemento geométrico que se quiere trazar. A continuación, se especifican los datos de partida en cada caso:

- **Trazado de rectas tangentes**: *pp*, *pc*, *cc*.

  Por ejemplo, *pc* indica que se trata de un problema en el que se pide trazar las rectas tangentes que pasen por un punto (*p*) y sean tangentes a una circunferencia (*c*).

- **Trazado de circunferencias conociendo el radio *R***: *Rpp*, *Rpr*, *Rpc*, *Rrr*, *Rrc*, *Rcc*.

  Por ejemplo, *Rrc* indica que lo que se pide es trazar las circunferencias conociendo el radio (*R*), que sean tangentes a una recta dada (*r*) y a una circunferencia (*c*) también dada.

- **Trazado de circunferencias sin conocer el radio**: *ppp*, *ppr*, *ppc*, *prr*, *prc*, *pcc*, *rrr*, *rrc*, *rcc*, *ccc*.

  Por ejemplo, *prc* se refiere al trazado de circunferencias que pasen por un punto (*p*) y sean tangentes a una recta (*r*) y a una circunferencia (*c*) dadas.

Dichas abreviaturas aparecerán entre paréntesis junto al enunciado del epígrafe correspondiente.

Ten en cuenta

- Una circunferencia es tangente a una recta o a otra circunferencia si tienen un único punto común.
- Si dos circunferencias son tangentes, el punto de tangencia se encuentra en la recta que une los centros (fig. 2).
- Si una recta es tangente a una circunferencia, el radio en el punto de tangencia es perpendicular a la tangente (fig. 3).
- El centro de cualquier circunferencia que pase por dos puntos está en la mediatriz del segmento que los une (fig. 4). Dicho de otro modo, todo radio perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.
- El centro de cualquier circunferencia tangente a dos rectas se encuentra en la bisectriz del ángulo que forman ambas (fig. 5).

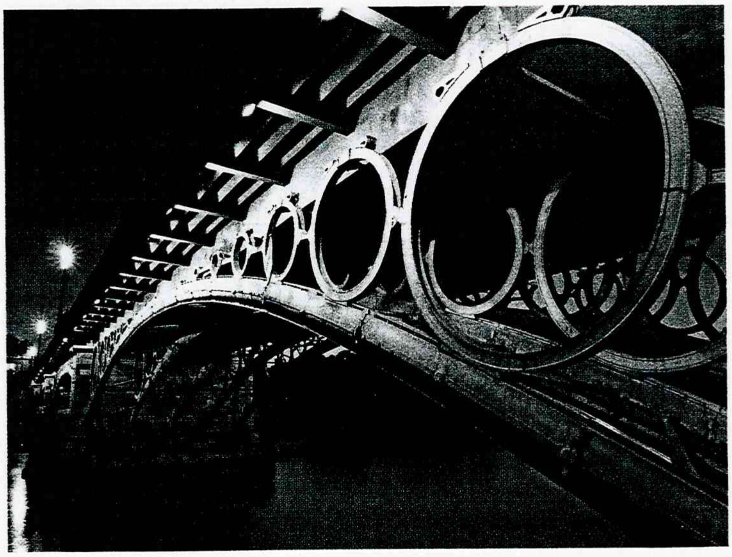


Figura 1

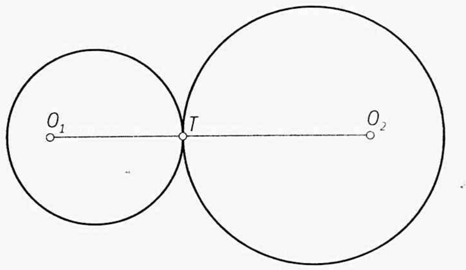


Figura 2

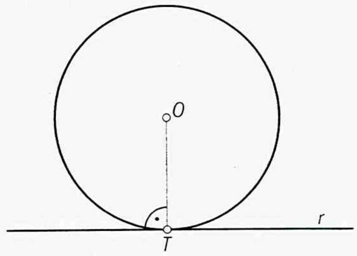


Figura 3

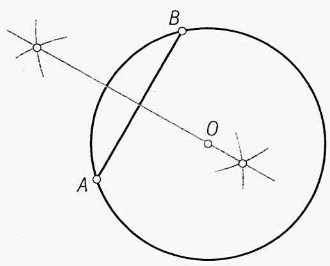


Figura 4

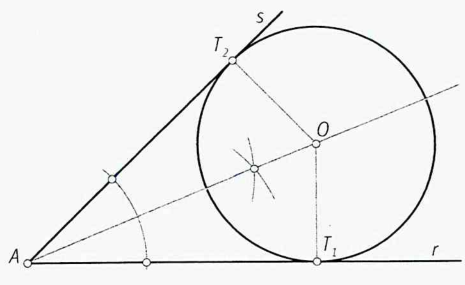


Figura 5

2 Trazado de rectas tangentes

En los motores, las correas de transmisión dan una idea clara de lo que representan las rectas tangentes a circunferencias (fig. 6).

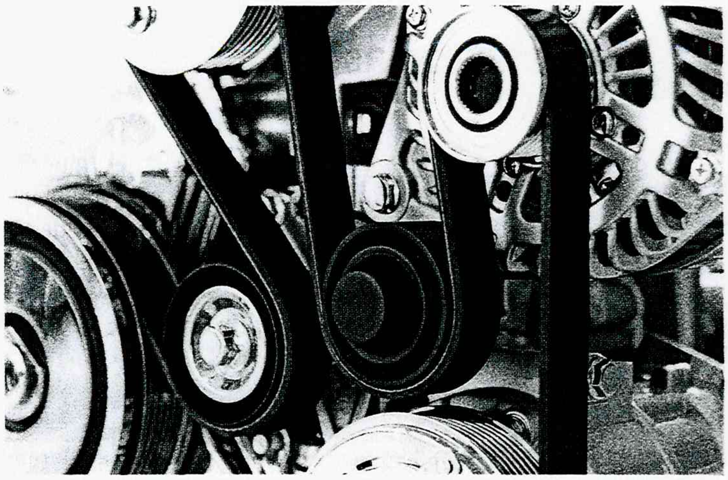


Figura 6

2.1. Rectas tangentes a una circunferencia que pasan por un punto (pc)

- **Cómo trazar la recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto de la misma**

Dados la circunferencia de centro *O* y el punto *M* (fig. 7):

1. Se traza el radio *OM* correspondiente al punto dado.
2. Por el punto *M* se traza la recta *r* perpendicular al radio *OM*.

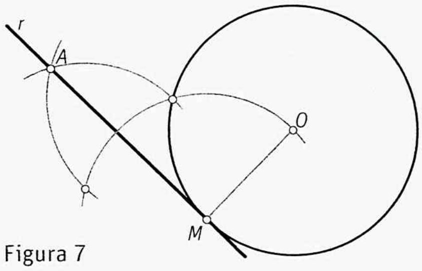


Figura 7

- **Cómo trazar rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior**

Dados la circunferencia de centro *O* y el punto *M* (fig. 8):

1. Se dibuja el segmento *OM* y se halla el punto medio *A* del mismo mediante el trazado de la mediatriz.
2. Con centro en el punto *A* y radio *AO* = *AM* se traza la circunferencia que corta a la dada en los puntos *B* y *C*, puntos de tangencia de las soluciones.
3. Se une el punto *M* con los puntos *B* y *C* mediante las rectas *r* y *s*.

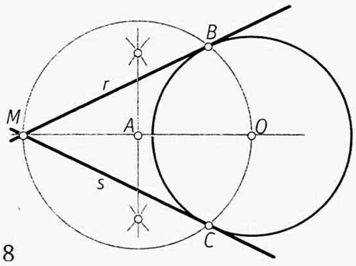


Figura 8

- **Cómo trazar rectas tangentes a una circunferencia de centro desconocido desde un punto de la misma**

Sean el arco *c* y el punto *M* del arco (fig. 9):

1. Con centro en el punto *M* y radio arbitrario se traza un arco que corta al dado en el punto *A*.
2. Con centro en el punto *A* y radio arbitrario se traza otro arco que corta al dado en el punto *B*.
3. Con centro en el punto *M* y radio *MB* se traza un arco que corta al anterior en el punto *C*. La recta *r* que une los puntos *M* y *C* es la solución.

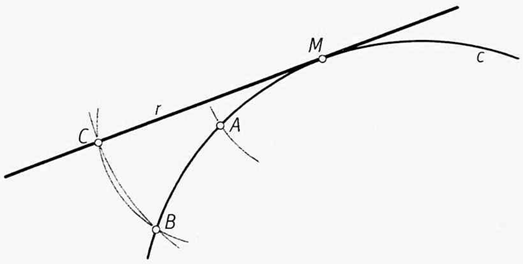


Figura 9

EJERCICIOS RESUELTOS

1 **Dados el segmento *AB* y el punto *O* (fig. 10), dibuja el triángulo que tiene por lado *AB*, sabiendo que *O* es el incentro.**

Solución:

1. El incentro es el punto donde se cortan las bisectrices de un triángulo. Por tanto, el incentro es el centro de la circunferencia tangente a los lados del triángulo.
2. Con centro en el punto *O* se traza la perpendicular al lado *AB*, obteniéndose así el punto *D* de tangencia de la circunferencia de centro *O* con el lado *AB*.
3. Por el punto *A* se traza la recta *r* tangente a la circunferencia anterior y por el punto *B* se traza la recta *s* tangente a la misma. El punto *C* de intersección de las rectas *r* y *s* es el tercer vértice del triángulo.

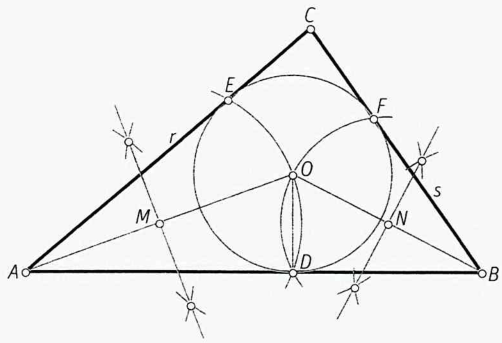


Figura 10

2.2. Rectas tangentes a dos circunferencias de distinto radio (cc)

- Cómo trazar rectas tangentes exteriores a dos circunferencias de distinto radio

Sean las circunferencias de centro O_1 y O_2 (fig. 11) y radios r_1 y r_2, respectivamente:

1. Con centro en O_2, centro de la circunferencia de mayor radio, se traza otra circunferencia cuyo radio sea $r_2 - r_1$.
2. Desde el centro O_1 se trazan las rectas m y n tangentes a la circunferencia anterior, de radio $r_2 - r_1$; para ello, con centro en el punto medio A del segmento O_1O_2, se dibuja un arco de radio AO_2 que corta a la circunferencia en los puntos B y C, que unidos con O_1 nos dan las tangentes m y n.
3. Las rectas que unen el punto O_2 con B y C cortan a la circunferencia dato en los puntos D y E de tangencia. Los puntos de tangencia con la otra circunferencia se hallan trazando por O_1 las rectas paralelas a O_2D y a O_2E, hasta cortar a la circunferencia en los puntos F y G. Las rectas r y s que unen los puntos de tangencia FD y GE son la solución.

$r_1 = 2'2$ cm
$r_2 = 3'2$ cm

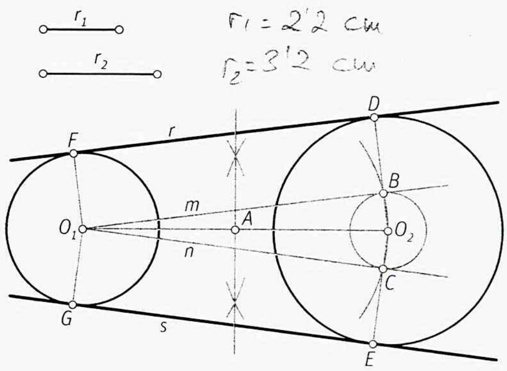


Figura 11

- Cómo trazar rectas tangentes interiores a dos circunferencias de distinto radio

Sean las circunferencias de centro O_1 y O_2 (fig. 12) y radios r_1 y r_2, respectivamente:

1. Con centro en O_2, centro de la circunferencia de mayor radio, se traza otra circunferencia cuyo radio sea $r_2 + r_1$.
2. Desde el centro O_1 se trazan las rectas m y n tangentes a la circunferencia anterior, de radio $r_2 + r_1$; es decir, con centro en el punto medio A del segmento O_1O_2, se dibuja un arco de radio AO_2 que corta a la circunferencia en los puntos B y C, que unidos con O_1 nos dan las tangentes m y n.
3. Las rectas que unen el punto O_2 con B y C cortan a la circunferencia dato en los puntos D y E de tangencia. Los puntos de tangencia con la otra circunferencia se hallan trazando por O_1 las rectas paralelas a O_2D y a O_2E, hasta cortar a la circunferencia en F y G. Las rectas r y s que unen los puntos de tangencia FD y GE son la solución.

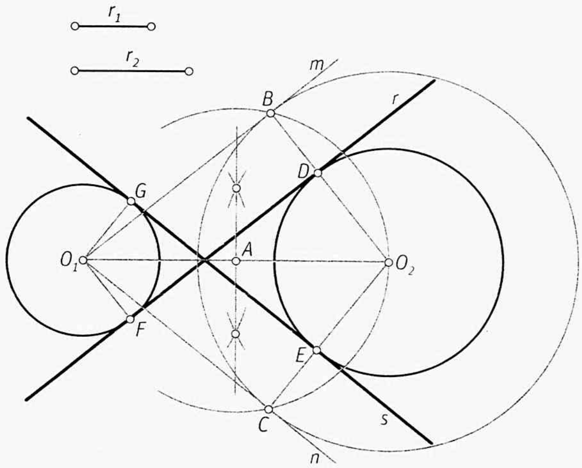


Figura 12

EJERCICIOS RESUELTOS

2 **Dibuja la copa de la figura** (fig. 13)**, determinando los centros y los puntos de tangencia.**

Solución:

1. Se sitúan los centros A, B, J y K y se dibujan las circunferencias de radios 8 mm y 16 mm (fig. 14).
2. Se trazan las rectas tangentes exteriores.

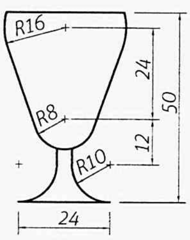
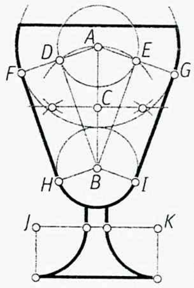


Figura 13



(escala 2:3)

Figura 14

3 Trazado de circunferencias conociendo el radio

3.1. Circunferencias que pasan por dos puntos (Rpp)

- Cómo trazar circunferencias que pasan por dos puntos

Dados los puntos *M* y *N*, y el radio *R* de la circunferencia (fig. 15):

1. Con centro en *M* y radio *R* se trazan dos arcos de circunferencia.
2. Con centro en *N* y radio *R* se trazan otros dos arcos de circunferencia, que se cortan con los anteriores en los puntos O_1 y O_2, centros de las circunferencias solución.

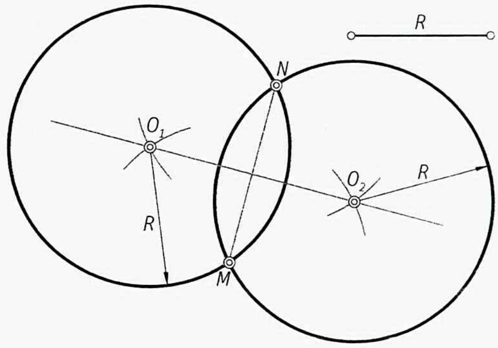


Figura 15

3.2. Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a una recta (Rpr)

- Cómo trazar circunferencias tangentes a una recta que pasan por un punto de la recta

Sean la recta *r*, un punto *M* de la misma y el radio *R* de la circunferencia (fig. 16):

1. Por el punto *M* se traza la perpendicular a la recta *r*.
2. Sobre la perpendicular, y a partir del punto *M*, se llevan en ambos sentidos las distancias MO_1 y MO_2 iguales al radio *R* dado. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de las soluciones y *M* el punto de tangencia común.

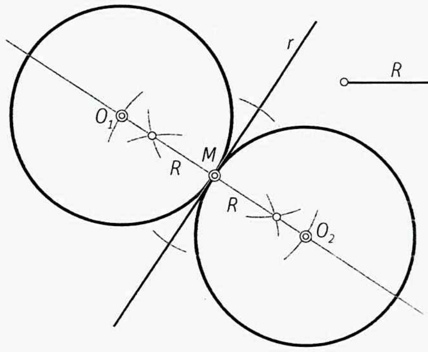


Figura 16

- Cómo trazar circunferencias tangentes a una recta que pasan por un punto exterior

Sean la recta *r*, el punto *M* y el radio *R* de la circunferencia (fig. 17):

1. Por un punto *A* cualquiera de la recta *r* se traza la perpendicular a esta y sobre ella se transporta un segmento *AB* igual al radio *R*; por el punto *B* se traza la recta *m* paralela a *r*.
2. Con centro en el punto *M* y radio *R* se trazan dos arcos de circunferencia, que cortan a la recta *m* en los puntos O_1 y O_2, centros de las dos soluciones.
3. Por O_1 y O_2 se trazan las perpendiculares a la recta *r*, con lo que se obtienen los puntos *C* y *D* de tangencia.

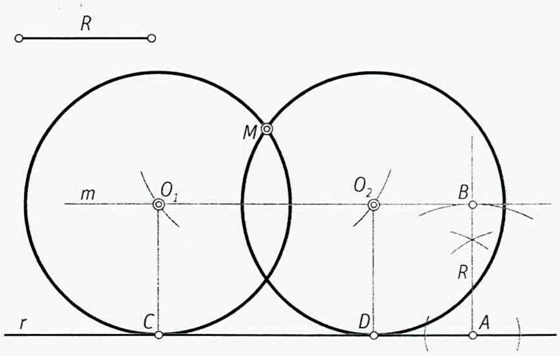


Figura 17

EJERCICIOS RESUELTOS

3 Dibuja el pie de copa de la figura (fig. 18).

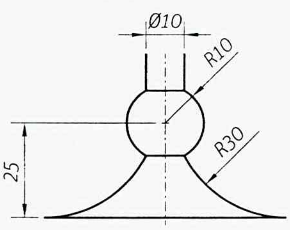


Figura 18

Solución:

Se trata de trazar las circunferencias que pasan por los puntos *C* y *D* y son tangentes a la base (fig. 19).

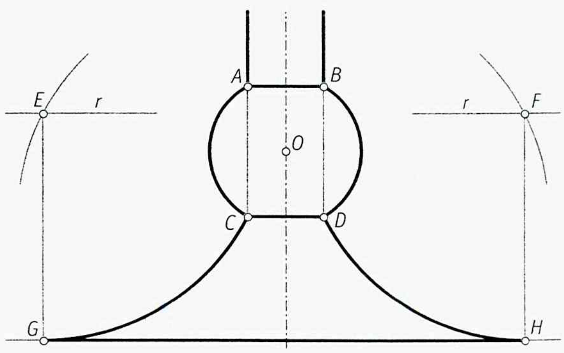


Figura 19

25

3.3. Circunferencias que pasan por un punto y son tangentes a una circunferencia (Rpc)

Cómo trazar circunferencias tangentes a otra circunferencia y que pasen por un punto de la misma

Sean la circunferencia de centro *O*, el punto *M* de ella y el radio *R* de las soluciones (fig. 20):

1. Se une el centro *O* con el punto *M* mediante una recta.
2. Sobre la recta anterior y a partir de *M* se trazan sendos arcos de radio *R* que cortan a la recta en los puntos O_1 y O_2.
3. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de las soluciones y *M* el punto de tangencia común.

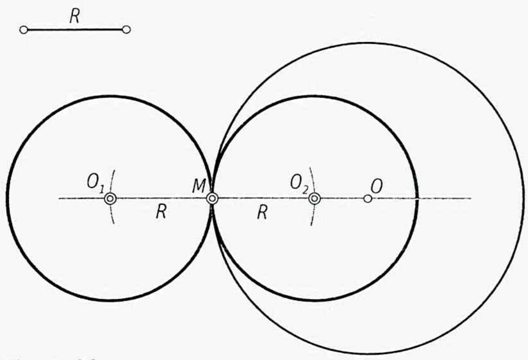


Figura 20

Cómo trazar circunferencias tangentes a otra circunferencia y que pasen por un punto exterior

Sean la circunferencia de centro *O*, el punto *M* y el radio *R* de las circunferencias solución (fig. 21):

1. A partir del centro *O* se traza una recta cualquiera y sobre ella se transporta el segmento $OA = R$; en dicha recta se determinan también los puntos *B* y *C*, tales que $AB = AC = R'$, siendo R' el radio de la circunferencia dada de centro *O*.
2. Con centro en *O* y radios $OB = R + R'$ y $OC = R - R'$ se trazan sendas circunferencias.
3. Con centro en el punto *M* y radio *R* se traza la circunferencia que corta a las anteriores en los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4, centros de las circunferencias solución. Los puntos de intersección de la circunferencia dada con los segmentos OO_1, OO_2, OO_3 y OO_4 determinan los puntos *D*, *E*, *F* y *G* de tangencia.

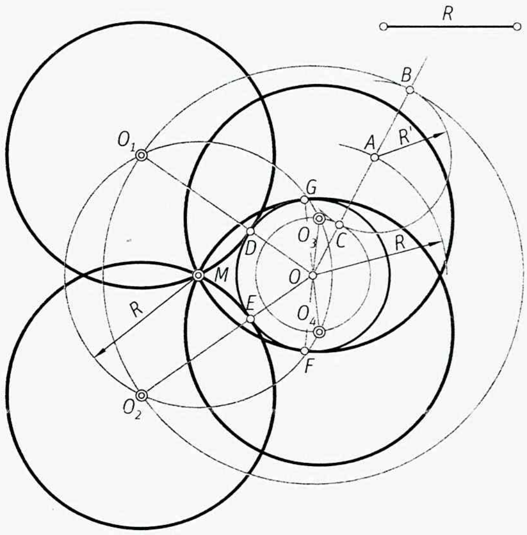


Figura 21

3.4. Circunferencias tangentes a dos rectas que se cortan (Rrr)

Cómo trazar circunferencias tangentes a dos rectas

Sean las rectas *r* y *s*, y el radio *R* (fig. 22):

1. Se trazan dos rectas *m* y *n*, paralelas a *r*, a una distancia *R* y otras dos rectas *p* y *q*, paralelas a *s*, a una misma distancia *R*. Los puntos donde se cortan las cuatro rectas *m*, *n*, *p* y *q* son los centros O_1, O_2, O_3 y O_4 de las soluciones.
2. Los puntos de tangencia *A*, *B*, *C*... se hallan trazando las perpendiculares a las rectas *r* y *s* por los centros O_1, O_2, O_3 y O_4.

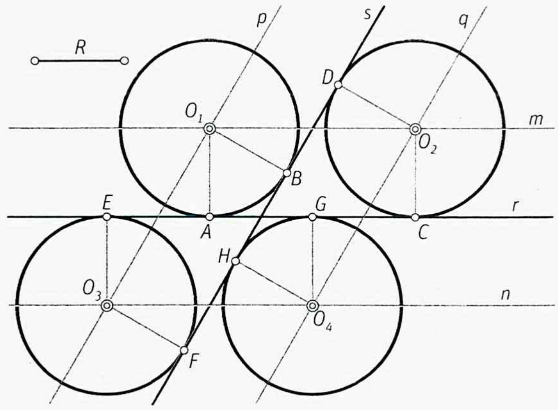


Figura 22

EJERCICIOS RESUELTOS

4 Dibuja la figura dada (fig. 23).

Solución:

Se trata de trazar la circunferencia tangente a las rectas *r* y *s* conociendo el radio (fig. 24).

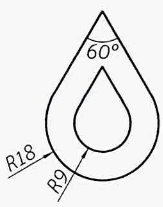


Figura 23

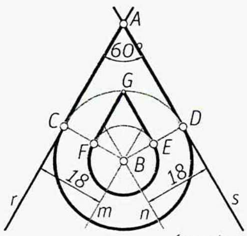


Figura 24

(escala 1:2)

4 Enlaces

Un **enlace** es la unión uniforme entre dos elementos geométricos que establecen una continuidad sin que haya ángulos ni dobles puntos de intersección.

Los casos más sencillos de enlaces se producen entre una recta y una circunferencia o entre dos circunferencias. Tal es el caso de los enlaces en los nudos de las autopistas (fig. 31).

Para un correcto trazado de los enlaces, deben estar determinados con precisión los centros y los puntos de tangencia. Para garantizar la continuidad del enlace entre rectas y arcos, y con el fin de evitar ángulos o dobles puntos (fig. 32), se trazan primero los arcos de circunferencia y después los segmentos rectos, lo cual permite realizar ligeras correcciones a las posibles imprecisiones cometidas.

Como hemos visto en la página 55, el radio de una circunferencia es perpendicular a la recta tangente en el punto de tangencia. Además, el punto de tangencia entre dos circunferencias está en la recta que une sus centros.

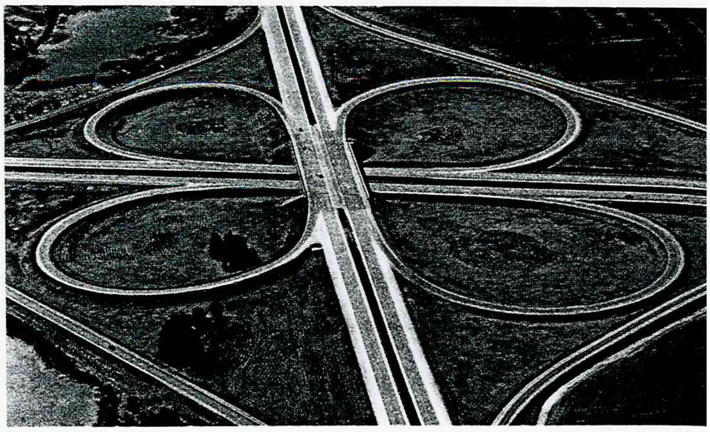


Figura 31

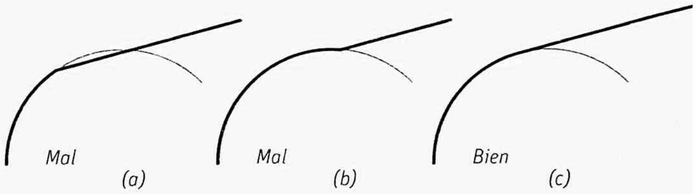


Figura 32

- Cómo enlazar dos rectas que se cortan mediante un arco de radio conocido

Dadas las rectas *r* y *s* y el radio *R* (fig. 33):

1. Se traza la bisectriz *t* del ángulo que forman las rectas *r* y *s*.
2. Se traza la recta *m* paralela a una de las dos rectas dadas, a una distancia igual al radio *R* dado.
3. El punto *O* de intersección de las rectas *t* y *m* es el centro de la circunferencia de enlace. Por el punto *O* se trazan las perpendiculares a las rectas *r* y *s*, que las cortan en los puntos *A* y *B* respectivamente, puntos de tangencia del enlace.

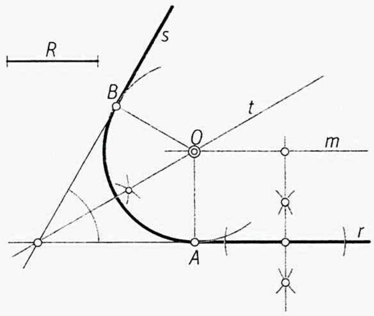


Figura 33

- Cómo enlazar dos rectas que se cortan mediante un arco, conociendo el punto de tangencia en una de ellas

Dadas las rectas *r* y *s* y el punto *A* (fig. 34):

1. Se traza la bisectriz *t* del ángulo que forman las rectas *r* y *s*.
2. Por el punto *A* se traza la perpendicular *p* a la recta *r*.
3. El punto *O* de intersección de las rectas *t* y *p* es el centro de la circunferencia de enlace. Por el punto *O* se traza la perpendicular a la recta *s*, que la corta en el punto *B* de tangencia.

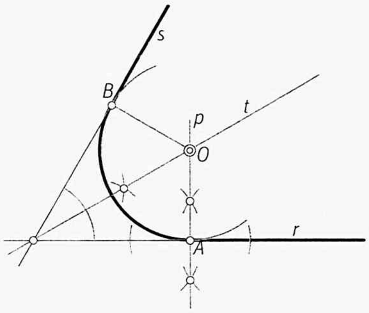


Figura 34

EJERCICIOS RESUELTOS

5 **Dibuja la figura dada** (fig. 35).

Solución:

Se trata de enlazar los lados del triángulo con arcos de radio conocido (fig. 36).

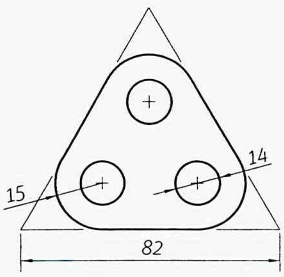


Figura 35

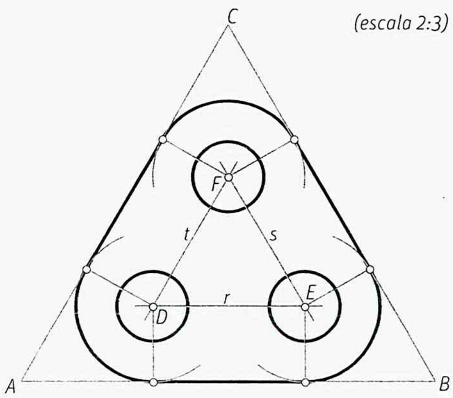


Figura 36

27

Cómo enlazar dos rectas paralelas mediante dos arcos de igual radio, conociendo los dos puntos de tangencia

Dadas las rectas *r* y *s*, y los puntos *M* y *N* (fig. 37):

1. Los centros de los arcos estarán en las perpendiculares trazadas por los puntos *M* y *N* a las rectas *r* y *s*.
2. Se halla el punto medio *A* del segmento *MN* y se trazan las mediatrices de *AM* y *AN*.
3. Los puntos en los que se cortan las mediatrices con las perpendiculares trazadas por *M* y *N* son los puntos O_1 y O_2, centros de los arcos solución, que son tangentes entre sí en el punto *A*.

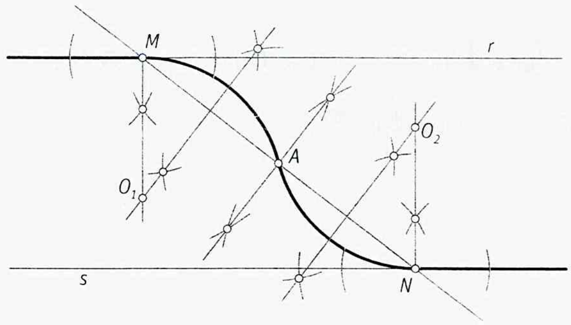


Figura 37

Cómo enlazar dos rectas cualesquiera mediante dos arcos, conociendo el radio de uno de ellos y los puntos de tangencia

Dadas las rectas *r* y *s*, los puntos de tangencia *M* y *N*, y el radio *R* (fig. 38):

1. Por los puntos *M* y *N* se trazan perpendiculares a las rectas *r* y *s*, respectivamente.
2. Sobre la perpendicular a *r* se traslada, hacia el interior del ángulo, el segmento $MO_1 = R$ y sobre la perpendicular a *s*, hacia el exterior, el segmento $NA = R$. El punto O_1 es el centro de uno de los arcos.
3. La mediatriz del segmento O_1A corta a la perpendicular a *s* en el punto O_2, centro del segundo arco. El punto *B* de tangencia entre las dos circunferencias está en la recta O_1O_2 que une sus centros.

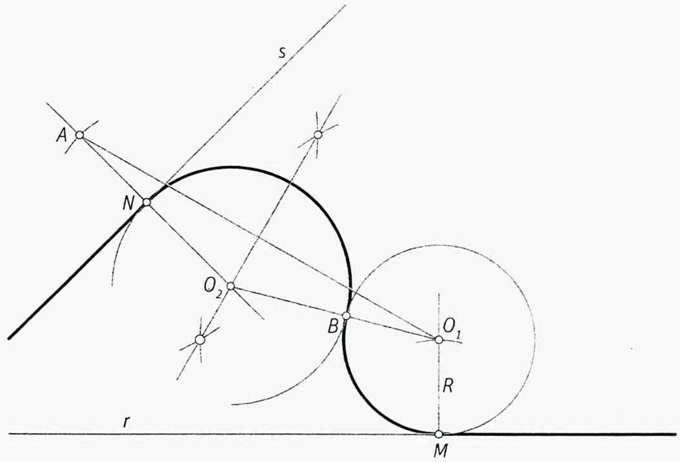


Figura 38

Cómo enlazar una recta y un arco mediante otro arco de radio conocido

Dados la recta *r*, la circunferencia *c* de centro *O* y el radio *R* (fig. 39):

1. Se traza la recta *m* paralela a la recta *r* a una distancia *R* igual al radio dado.
2. Se traza la circunferencia *d* con centro en *O* y radio igual a la suma (o a la diferencia, según sea el caso) del radio de la circunferencia *c* y el radio dado *R*.
3. El punto *O'* de intersección de la circunferencia *d* y la recta *m* es el centro del arco de enlace.
4. El punto *A* de tangencia con la recta *r* se halla trazando la perpendicular a *r*, y el punto *B* de tangencia entre las dos circunferencias está en la recta *OO'* que une sus centros.

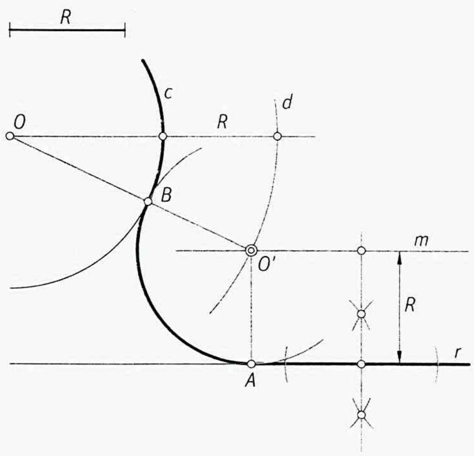


Figura 39

Cómo enlazar una recta y un arco mediante otro arco, conociendo el punto de tangencia con la circunferencia

Dados la recta *r*, la circunferencia de centro *O* y el punto *A* (fig. 40):

1. Por el punto *A* se traza la recta *t* tangente a la circunferencia (perpendicular al radio *OA*).
2. Se dibuja la bisectriz *m* del ángulo que forman las rectas *r* y *t*. El punto *O'* de intersección de *m* con la recta *OA* es el centro del arco de enlace.
3. El punto *B* de tangencia con la recta *r* se halla trazando la perpendicular a la misma.

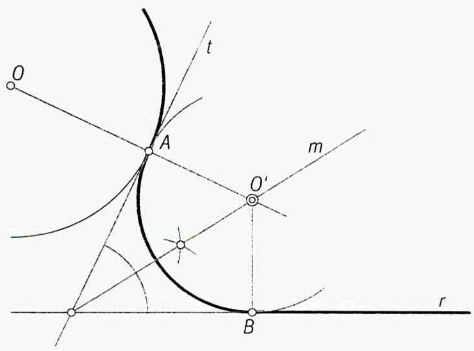


Figura 40